ガロア表現の変形に対する岩澤理論の研究について (「整数論のこの主題,自分はこう考える」若手発表会)

落合, 理

数理解析研究所講究録 1256 巻 2002 年 38-70

ガロア表現の変形に対する岩澤理論の研究について

東京大学数理科学研究科 (University of Tokyo)
学振特別研究員（PDF） 落合 理 (Ochiai, Tadashi)

「ガロア表現の変形に対する岩澤理論」というテーマでの研究については２年前の数理研の代数的整数論の研究集会でも一度話させていただいた [O2]. 今回の研究集会の趣旨である「考え方や研究の位置付けをより前面にだす」ということ，そしてまた自分自身の研究に関する視点のその後の変遷，あるいは新しく明らかになってきた問題点などを加味して出来る限り詳しく今回の主題および結果について説明していきたい.

Contents

1. 岩澤理論–主に cyclotomic tower case の復習

1.1. セルマー群と L 函数. 数論および数論幾何の研究における多くの人々の興味の中心は一言でいえば代数体上定義された多様体の数論的性質を（人により切り口は異なるかもしれないが）様々な角度から研究することであると思う. その際, 付

随するガロア表現を通して研究することがしばしば有益である.

$$
\begin{array}{c}
\textbf{有理数体上定義された代数多様体（あるいはもっと一般に代数体上のモチーフ)} \\
\downarrow \\
\textbf{有理数体 } \mathbb{Q} \textbf{ の絶対ガロア群 } G_{\mathbb{Q}} \textbf{ の } l\textbf{-進表現の compatible system } \{T_l\}_{l:\ \mathrm{primes}}
\end{array}
$$

つまり調べたい幾何的対象に対して, ガロア群の作用する有限生成自由 $\mathbb{Z}_l$-加群 T_l を付随させ, それを通してもとの幾何的対象を調べるのである. このような l-進ガロア表現 T_l は, 例えば有理数体上の楕円曲線 $E/\mathbb{Q}$ のときにはよく知られた l-進テイト加群 $T_l(E) := \varprojlim_n E[l^n]$ で与えられ, 一般の多様体 X に対してもエタールコホモロジー $H^*_{\mathrm{et}}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_l)$ を使って機械的に構成ができるものである.

このガロア表現を介して, ハッセ-ヴェイユ L 函数と呼ばれる複素函数が定義される. これは元の幾何的対象の様々な性質を反映している大切な函数である. 大まかに言うと, l-進表現の compatible system $\{T_l\}_{l:\ \mathrm{primes}}$ に対するハッセ-ヴェイユ L 函数 $L(\{T_l\}, s)$ はオイラー積:

$$L(\{T_l\}, s) = \prod_{q:\mathrm{primes}} \det(1 - \mathrm{Frob}_q q^{-s}; T_p^{I_q})^{-1} \ (p \text{ は適当な素数})$$

で定義される[1]. geometric origin をもつよい l-進表現の compatible system $\{T_l\}$ に対しては $L(\{T_l\}, s)$ を定義するオイラー積は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きい領域で収束し正則な函数となる. $L(\{T_l\}, s)$ は全複素平面に有理型接続されることが予想されている.

一方で $\{T_l\}$ に対してセルマー群 $\mathrm{Sel}(\{T_l\})$ というアーベル群がガロアコホモロジー $\bigoplus_l H^1(\mathbb{Q}, T_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$ の適当な部分群として定義される. ハッセ-ヴェイユ L 函数と並んでこのセルマー群も元の幾何的対象の性質を反映する大切な群である.

$$
\begin{tikzcd}
 & \textbf{幾何的対象} \arrow[d] & \\
 & \begin{pmatrix} G_{\mathbb{Q}} \textbf{ の } l\textbf{-進表現の} \\ \text{system } \{T_l\} \end{pmatrix} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{pmatrix} \textbf{ハッセ-ヴェイユ } L \textbf{ 函数} \\ L(\{T_l\}, s) \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \textbf{セルマー群} \\ \mathrm{Sel}(\{T_l\}) \end{pmatrix}
\end{tikzcd}
$$

---

[1] 厳密には p のとりかたによらないこと, q が T_p の分岐素点になるときの定義の well-definedness などの問題点があるがここでは細かいことに立ち入らない (例えば [O1], [Sa] など参照).

例えば, 最も簡単な幾何的対象として有限次代数体 $K/\mathbb{Q}$ が定める 0 次元のスキーム Spec(K) がある. この場合, 先の図でのハッセ-ヴェイユ L 函数は K のデデキント・ゼータ函数 $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}_K} \frac{1}{\sharp(\mathcal{O}_K/\mathfrak{A})^s}$ に他ならず, 一方でセルマー群はイデアル類群や単数群である. 考える対象が楕円曲線の場合には, これらは楕円曲線論でさかんに研究されてきた楕円曲線の L 函数やセルマー群である. この意味でこれらは古典的によく研究されてきた代数体や楕円曲線の整数論の一般化を考えていると思えるわけである.

例えばイデアル類群は代数体の整数環がどのくらい単項イデアル整域から遠いかを表す大事な群であるし, 一方でデデキント・ゼータ函数 (やディリクレ L 函数) の様々な整数点での特殊値は Euler, Leibnitz の昔から研究されてきた数論的な無限和の一般化でもある. その成り立ちから解析的な対象と言える「L 函数の特殊値」ともう一方の代数的な不変量である「セルマー群の大きさ」はともに重要な値である. 現在の整数論においてはこの二つの値の間に不思議な結びつきがあることが予想されている.

$$\begin{pmatrix} \text{ハッセ-ヴェイユ } L \text{ 函数の特殊値} \\ L(\{T_i\}, 0) \end{pmatrix} \overset{\text{mysterious relation}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \text{セルマー群} \\ \mathrm{Sel}(\{T_i\}) \text{ の大きさ} \end{pmatrix}$$

先に述べた代数体の場合には, この misterious relation は古典的によく知られた「ディリクレの解析的類数公式」であり,

- $(\zeta_K(s)$ の $s=0$ での零点の order$) = ($単数群の $\mathcal{O}_K^\times$ の $\mathbb{Z}$-rank$)$.
- $\lim_{s\to 0} s^{-\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K^\times)}\zeta_K(s) = K$ のイデアル類群の位数 $\times \dfrac{\text{単数基準}}{\mathcal{O}_K^\times \text{ の有限部分群の位数}}$.

という形の結果として知られている. また楕円曲線の場合には, BSD 予想としてこのような misterious relation が定式化されているが未だ完全解決には程遠い状態である.

由来のかけ離れた二つの対象の間に関係があるということの実用上または理論上の大切さも強調しておきたい. 例えば, 一番最初のデデキントゼータ函数や函数たちとイデアル類群の場合にはこのような関係があることによりイデアル類群の大きさを L 函数を用いた解析的な手法により計算するアプローチを与えている. また L 函数の特殊値の側からすると興味の対象である特殊値の幾何的な解釈を与えてくれる思想上大切な関係である.

1.2. cyclotomic tower の場合の岩澤理論. このようなセルマー群と L 函数のの結びつきを p-進的に論ずるのが岩澤理論である. 岩澤理論はもともと岩澤健吉氏の５０年代からの円分体のイデアル類群の研究に端を発する理論であり（これらについては岩澤氏の一連の論文やテキスト [Wa] 及びその巻末の参考文献を参照のこ

と）, その後多くの人々の尽力により, イデアル類群以外の数論的対象に対しても「cyclotomic tower における岩澤理論」を考える枠組みが整備されてきた. 今回のテーマはその「cyclotomic tower における岩澤理論」をガロア表現の変形という言葉を通して再定式化かつ一般化できないかということである. 次節でその一般化の試みをできるだけ正確に伝えるためにまずこの節ではもともとの cyclotomic tower の場合の話を振りかえりたいと思う (以後説明を試みる岩澤理論の一般化の様子については４．４節の図も参照のこと).

今後, 素数 p を固定して話をすすめる. 簡単のため素数 p は奇素数としておく. $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ を円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする. つまり, $\mathbb{Q}_\infty$ は $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ に含まれガロア群 $G_\infty = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ が $\mathbb{Z}_p$ と同型になるような唯一の部分体である. 自然数 n に対して $\mathbb{Q}_n$ を $\mathbb{Q}$ 上 p^n-次であるような $\mathbb{Q}_\infty$ の唯一の部分体とする. また, 代数閉方 $\overline{\mathbb{Q}}$ の複素埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ と p-進埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する. これによって以下 $G_{\mathbb{Q}_p}$ を $G_{\mathbb{Q}}$ の p における分解群とみなす. 原始 p^n 乗根 ζ_{p^n} たちのなすノルム系列 $\{\zeta_{p^n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ をひとつ固定しておく.

今, 与えられた $G_{\mathbb{Q}}$ の表現の compatible system $\{T_l\}$ に対して n ごとに $G_{\mathbb{Q}_n}$ への制限を考える.

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix} G_{\mathbb{Q}_n} \text{ の } p\text{-進表現 } T_p \\ (n \text{ がはしる}) \end{pmatrix} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{pmatrix} \text{特殊値の族} \\ L(T_p \otimes \chi, 0)/C_\infty \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} p\text{-セルマー 群の族} \\ \mathrm{Sel}(T_p, \mathbb{Q}_n) \end{pmatrix}
\end{tikzcd}
$$

ここで考えている幾何的対象に対して, (p-)ordinary, critical という条件を課すことにする.

ガロア表現 T_p が ordinary とは, $G_{\mathbb{Q}_p}$-加群としての減少フィルトレーション $\mathrm{Fil}^i T_p \subset T_p$ が存在し, 各 i での graded piece $\mathrm{gr}^i(T_p) = \mathrm{Fil}^i T_p/\mathrm{Fil}^{i+1} T_p$ が自由 $\mathbb{Z}_p$-加群となり $\mathrm{gr}^i(T_p)$ 上への惰性群 I_p の作用が円分指標 χ_{cyc} の巾 χ_{cyc}^i で与えられるようなものをいう. T_p がディリクレ指標からくる 1 次元 p-進表現の場合には ordinary であり, また楕円曲線の Tate 加群 $T_p(E)$ は E が p で good ordinary reduction か multiplicative reduction をもつとき ordinary な p-進表現となることが知られている [Si]. Greenberg によってこの ordinary のフィルトレーションを用いて次のようにセルマー群が定義される:

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_n) = \mathrm{Ker}[H^1(\mathbb{Q}_n, A_p) \longrightarrow \prod_{\lambda \nmid p} H^1(I_\lambda, A_p) \times H^1(I_p, A_p/\mathrm{Fil}^0 A_p)].$$

ここで $A_p = T_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ である. 順極限で $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty) = \varinjlim_n \mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_n)$ を定義する. $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)$ は自然に $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-加群としての構造を備えている.

詳しいことには立ち入らないが (χ によらず) 考えている幾何的対象のみで定まる複素周期と呼ばれる複素数 C_∞ が定義される. critical という条件の下で $L(T_p \otimes \chi, 0)/C_\infty$ は G_∞ の任意の有限指標に対して代数的数となると予想されている (Deligne 予想 [De2]). この Deligne 予想により $L(T_p \otimes \chi, 0)/C_\infty$ は複素数であると同時に自然に p-進数ともみなせることに注意したい. 今次のような予想が定式化されている.

岩澤主予想 (cyclotomic tower の場合) . *ordinary, critical* の条件, *Deligne* 予想と若干の仮定の下で次が成り立つ

(I). $L_p(\{T_l\}) \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ が存在して各 G_∞ の非自明な有限指標 χ に対して,

$$\chi(L_p(\{T_l\})) = G(\chi) \times \prod_i \left(\frac{p}{\alpha_i}\right)^{\mathrm{ord}_p(\mathrm{cond}(\chi))} \times L(T_p \otimes \chi, 0)/C_\infty$$

が成り立つ. (ここで $G(\chi)$ はガウス和を表し, α_i は L 函数 $L(T_p \otimes \chi, s)$ のオイラー因子を与える多項式 $E_p(X)$ の *p-unit roots* を走る)

(II). セルマー群 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)$ のポントリャーギン双対 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)^\vee$ は有限生成ねじれ $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-加群となる.

(III). 上のセルマー群のねじれ性の仮定の下で特性イデアルを

$$\mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)^\vee) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{h_\mathfrak{p}}$$

とおく (ここで $h_\mathfrak{p} = \mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]_\mathfrak{p}}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)^\vee)_\mathfrak{p}$ とおく). このとき次の等式が成り立つ:

$$(L_p(\{T_l\})) = \mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)^\vee)$$

まずこの予想についていくつかの注意を与えたい.

注意 1.1. 1. この岩澤主予想の一番簡単な場合は次元が0, つまりディリクレ指標から定まるガロア表現の場合である. この場合における p-進L函数は Kubota-Leopoldt によりはじめて構成され, セルマー群は（この場合は無限次拡大上のイデアル類群であるが）岩澤氏によって研究が創始された. 岩澤主予想において最も大切な p-進L函数とセルマー群との関係も岩澤氏によりはじめて提起された. これは８０年代前半に Mazur-Wiles [MW1] により解決されている. Mazur-Wiles の証明はモジュラー曲線のエタールコホモロジーからつくるガロア表現の中に十分大きな不分岐な部分表現をつくる方法であった. この方法とは全く逆の別証明が Rubin ([L] の appendix) によって与えられている. 彼

の方法は円単数から構成されるオイラー系によりセルマー群が十分小さいことを示すものであり, ある意味では Mazur-Wiles の証明と全く逆の方向の証明であると言える.

2. もともとの円分体以外で岩澤主予想がある程度調べられている例としては有理数体上の ordinary な楕円曲線, ordinary なモジュラー形式などに付随するガロア表現がある. p-進 L 函数は Mazur-SwinnertonDyer[MS], Mazur-Tate-Teitelbaum[MTT] らの仕事により構成がなされ, p-進 L 函数とセルマー群との関係も Mazur 氏により予想が提出されている [M1]. この場合の岩澤主予想に対して現時点で唯一結果の出ているアプローチはオイラー系の手法がある. これは虚数乗法をもつモジュラー形式の場合は Rubin 氏 [R1] によって, また虚数乗法をもたないモジュラー形式の場合は加藤氏 [Ka3] によってそれぞれオイラー系の構成がなされており, それによって (II) のセルマー群のねじれ性, (III) の等式の半分の包含関係

$$(L_p(\{T_l\})) \subset \mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)^\vee)$$

など岩澤主予想の部分的結果が得られている. 楕円曲線の場合の岩澤理論の現状については [Gr2] 等を参照されたい.

3. 上の p-進 L 函数の一般の存在予想は Coates と Perrin-Riou によって定式化が研究され与えられたものである [CP]. 無限個の点で値が一致するような $\mathbb{Z}_p$-係数の巾級数は函数として一致するという岩澤函数の一致の定理により, 上の補間性質によって実は p-進 L 函数 $L_p(T_p) \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ が一意的に特徴付けられていることにも注意したい.

4. セルマー群の定義については, Greenberg 流のフィルトレーションを使った定義と並んでよく使われる大事なセルマー群として Bloch-Kato によるセルマー群 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)$ がある. これはセルマー群を定める局所条件として, Fontaine による p-進周期の環 B_{crys} から定義するフィルトレーション $H^1_f(\mathbb{Q}_p, A_p) \subset H^1(\mathbb{Q}_p, A_p)$ を用いるものである (この H^1_f については [BK] を参照のこと). 二通りで定義されるセルマー群 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)$ と $\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)$ はかなり一般の状況で有限群の差をのぞいて一致すること, 特に特性イデアルの間の等式

$$\mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)^\vee) = \mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)^\vee)$$

がわかっている [O3, §4].

岩澤理論, 特に岩澤主予想では上に述べたように p-進的な視点から L 函数とセルマー群の関係を考える. このように円分拡大の tower を考え p-進的極限をとって考えることで物事が記述しやすくなり最初に問題とした L-函数の値とセルマー群の

大きさの関係に対してもしばしば有効なアプローチを与える. 一方で p-進的な予想が解けたとしても最初に述べた問題が全て解決できるわけではない[2].

ただここで強調しておきたいことは, このように p-進的極限で L 函数とセルマー群の関係を考えることにより, おのおののハッセ-ヴェイユ L 函数を個別に考えていたときよりもきれいな式が現れてくることである. 極限をとることにより, 上で述べたように

$$(p\text{-進 } L \text{ 函数}) = (\text{セルマー群の特性イデアル})$$

ということが成り立つと期待しているわけである. ここで定数倍のずれを無視すれば, セルマー群の特性イデアル $\mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)^\vee)$ は有限次 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ 上への G_∞ の作用によるある種の行列式 $P(X) = \det(1 - g_\infty X; \mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) \in \mathbb{Q}_p[X]$ (g_∞ は G_∞ の位相的生成元) によって

$$\mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]}(\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(T_p, \mathbb{Q}_\infty)^\vee) = (P(g_\infty^{-1}))$$

と表される. つまり, 特殊値に落とす以前に（定数倍のずれを無視すれば）p-進 L 函数という函数自身がもともと

$$(L_p(\{T_l\})) = (P(g_\infty^{-1}))$$

という行列式表示をもつ. このように具体的な問題への応用があるということを超えてその理論の形が非常にきれいであるということ, それ自体も大切なことであると思うのである.

2. 岩澤理論–ガロア表現の変形に対する岩澤理論の建設に向けて

2.1. **どのようなことをやりたいのか.** Greenberg [Gr1] は９０年代はじめに次のような方向性での岩澤主予想の一般化を提唱した:

Greenberg の提案 . R を”大きな” ネーター的局所整域とする (ここで R として念頭に置いているのは例えば 岩澤代数 $R = \mathbb{Z}_p[[X_1, \cdots, X_g]]$ などが最も典型的な例である). $\widetilde{T}$ をガロア群 $G_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の連続な作用をもつ有限生成自由 R-加群とする. 素数 p において *Panchishkin* 条件という *classical* な *ordinary* の条件を一般化したある条件（[Gr1, §4] 参照）を仮定する. このとき次のような形での岩澤主予想が成り立たないだろうか?

(I). $\widetilde{T}$ の各数論的な特殊化ごとにその特殊値の自然な補間性質をもつような p-進 L 函数 $L_p(\widetilde{T}) \in R$ が存在する.

[2]あまり立ち入らないが, 例えば p-進の世界で BSD 予想が成立してもハッセ-ヴェイユ L 函数の世界では完全には BSD 予想はわからないことなど p-進だけでは元の問題を必ずしも導かないこと

(II). イデアル類群や楕円曲線などで今までの定義との互換性をもつような適当なセルマー群 $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})$ がガロアコホモロジー群 $H^1(\mathbb{Q}, \widetilde{T} \otimes_R R^\vee)$ の適当な局所条件による部分群として定義され, $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})$ のポントリャーギン双対 $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee$ は R-加群として有限生成かつねじれ的である.

(III). $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee$ に対して R のイデアルの間の等式 $(L_p(\widetilde{T})) = \mathrm{char}_R(\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee)$ が成り立つ.

まず, 先の節で紹介した cyclotomic tower の場合も上のような見方を通して解釈できることに注意したい. $\widetilde{\chi}: G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow G_\infty \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]^\times$ を普遍円分指標とし, また $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]](\widetilde{\chi})$ を $G_{\mathbb{Q}}$ が $\widetilde{\chi}$ によって作用するような階数 1 の自由 $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-加群とする. 今 $G_{\mathbb{Q}}$ の対角作用によるテンソル積表現 $\widetilde{T} = T_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[G_\infty]](\widetilde{\chi})$ を考えるとガロアコホモロジーに対する Shapiro の補題により

$$H^1(\mathbb{Q}, \widetilde{T} \otimes_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]} \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]^\vee) \cong H^1(\mathbb{Q}_\infty, A_p)$$

が成立する. かくして第 1 節で説明された ordinary な p-進表現 T_p の cyclotomic tower における岩澤理論も $R = \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$, $\widetilde{T} = T_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[G_\infty]](\widetilde{\chi})$ を考えることで上のような定式化で言いかえられるのである. このようにある p-進表現 T をとめて体の拡大の tower を考えた従来の岩澤理論と対比して, 体 $\mathbb{Q}$ は固定しておき $G_{\mathbb{Q}}$ の作用する R 上のガロア表現の変形 $\widetilde{T}$ を考え $\widetilde{T}$ の特殊化のガロア表現に付随したセルマー群や L 函数の特殊値の family を考える定式化を「ガロア変形に対する岩澤理論」と呼ぶことにする. cyclotomic tower から上のようにして得られる cyclotomic deformation $T_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[G_\infty]](\widetilde{\chi})$ の場合にはこれは単なる言い換えでしかないがこのような見方でとらえ直すことにより岩澤理論がより広い対象に対して考えられるようになると期待される.

一方で Greenberg は上のような提案をしたものの以下に説明するように cyclotomic tower の場合に比べて定式化にあいまいさが残っていたり状況証拠としての支持例があまりにも少ないように思えるのである. 今までの 2 節で考えた cyclotomic deformation とは異なるガロア表現の変形のうちで重要かつ手がつきやすいものから具体的にセルマー群や p-進 L 函数を調べていきたい. 限られた特別な場合にでも cyclotomic deformation では現れなかった新しい問題点を浮き彫りにするとともに正確な状況設定を追及していくことが現段階で大事なのではないだろうか.

2.2. **動機や問題点について.** 話をすすめる前にこのような「ガロア表現の変形の言葉を通した岩澤主予想(および岩澤理論)の再定式化かつ一般化」のプランの興味深いところまたは有益な点に関して思うところに関してもかなり主観的意見になるが少し考えてみたい.

何故ガロア変形の岩澤理論を考えたいのか？． 1. 前節で述べたような今までの *cyclotomic tower* の場合自身にも応用があるのではないだろうかという期待がある． 例えば, p で *split multiplicative reduction* をもつ楕円曲線 E の 1 変数 p-進 L 函数 $\zeta^{MTT}_{E,p}(s)$ の $s=1$ での 1 階微分の値に関する *trivial zero* 予想 [MTT] は *Greenberg-Stevens* [GS] によって最初に証明された．証明の方針は, s に加えてモジュラー形式の重さからくるもう 1 変数のパラメーター k をもつ 2 変数の p-進 L 函数 $L_p(k,s)$ で, $L_p(k,s)$ の $k=2$ への特殊化がもとの 1 変数の p-進 L 函数 $\zeta^{MTT}_{E,p}(s)$ となるものを構成し, $L_p(k,s)$ の $(k,s)=(2,1)$ での「k 方向」と「s 方向」の２通りの偏微分係数を計算し比較することによる．このように, 彼らの証明の大事なアイデアは, *cyclotomic tower* を拡張するより大きな p 進的な *family* を考えることであった．例え *cyclotomic tower* に対する岩澤理論固有の問題においても, より大きな *family* を考えることによって問題を解決できることは他にもたくさんあるのではないかと期待している．

2. 今まで常に無限次のガロア拡大から来る岩澤理論のみを扱ってきたのであるがもっと一般的に対象を広げていくことで状況が整理され物事がより普遍的な形で捉えなおされるかもしれない．このような一つの例として, 次節で説明するガロア変形に対するオイラー系の結果（第２節の定理Ｂ）もあげておきたい．オイラー系の理論のより一般の変形への拡張を考える上で特に以前に得られていた *Kato*[Ka2], *Rubin*[R2], *Perrin-Riou*[P] らによる *cyclotomic tower case* のオイラー系の理論に対してもより技術的に簡略な次元に関する帰納法による別証明が副産物として得られる (第４節および注意 4.8 も参照)．これは比較的テクニカルな部分での利点であるがこのような視点を推し進めることで, 上の場合以外でもより本質的なレベルでの岩澤理論の様々な問題が今までより簡略な見方ができるかもしれない．

3. 「変形の岩澤理論」の応用として今まで古典的には岩澤理論が扱えなかった対象にも岩澤理論を考えられないだろうかと考えている．第４節でも触れるが例えば重さ１のモジュラー形式のセルマー群の特性イデアルの研究への応用などがそのような例として挙げられる．重さが２以上の場合と違い, 重さ１から来るアルチン表現に対しては前節で述べた *cyclotomic tower* の岩澤理論を考える上での前提条件である *critical* の条件が満たされない．つまり, L 函数の特殊値が全く代数性をもたないため L 函数の値の p-進補間自体が意味をなさないのである．結果としてセルマー群に対応すべき p-進 L 函数が自然な意味では存在しない．このような場合でも肥田理論からくる *family* とそれに対する「変形の岩澤理論」を考え, 再び重さ１に「特殊化」するという手法で *cyclotomic tower* のセルマー群を調べられるかもしれない．(このような方向

での今回発表した仕事の応用や関連した *Greenberg-Vatsal* の仕事については以下の第4節も参照のこと)

4. またこのように岩澤理論にも変形的観点を積極的に導入することで理論自体が豊かになるのではないだろうかと考えている. 物事を *family* にして考えるという発想は数学に広くある考え方かもしれない. 例えば, 代数幾何等においては数論より前から代数多様体や複素多様体の変形やモジュライという考え方が導入されている. 変形という視点が代数幾何にもたらしてきた「豊かさ」は個々の応用を離れてもはかり知れないものがあるように思う. 岩澤理論においても変形的な視点をより強く前面に押し出したい.

上にも述べたように Greenberg[Gr1] が最初に提起したこのような変形を通した岩澤理論の再定式化は自分にとっても興味を魅かれるところの多い考え方ではあるが, ここ数年, 一般のガロア表現の変形にこのような研究を進めて行くうちに当然問題点にも多数ぶつかるようになった. いくつか問題点を提起しておきたい.

変形の岩澤理論の問題点. 1. まず, 前節で述べたような *cyclotomic tower* の場合には予想の定式化の上では望むべき p-進 L 函数がどのようなものであるべきかということがはっきりしている [CP]. ところが, *cyclotomic tower* の場合を離れてガロア表現の変形空間に対しての p-進 L-函数がどう特徴付けられるべきかということになると予想の上でもまだ定かでない点が多い. これは前節の *cyclotomic tower* の場合がひとつの決めたモチーフの指標による *twist* の *family* のみを動いていたのに対し一般の場合ではその *family* の中に様々な異なるモチーフが現れ, 結果としてモチーフの p-進周期という新しい情報を考える必要がでてくることに起因する. このような状況をどう解釈し定式化するかがまだわからない状態である. (これらの問題については第3節の定理Bの後の注意 3.4 も参照されたい)

2. *cyclotomic tower* の場合と同様よいセルマー群をガロアコホモロジーの中でよい局所条件によって特徴付けなければならないのであるが, セルマー群のよい定義はどう与えるべきだろうかということもまた問題となってくる.
3. 前節の *cyclotomic tower* の場合に含まれないような一般のガロア表現についての岩澤理論の研究の試みが未だ少ないため, まだ一般化の定式化に対する展望の見通しが悪い. 現段階では, p-進 L 函数などの知られている例もほとんどないのである. テストケースとしての手近な例からの詳細な研究がもっとたくさん必要である.

このような動機と問題点を踏まえた上で, 次節以降でより具体的かつ特定された場合をテストケースとしての変形の岩澤理論に関する試みを述べていきたい.

3. 肥田の普遍モジュラー変形の場合での岩澤理論の現状

前節での「Greenbergの提案」のより厳密な定式化と成立する具体例を探すためにテストケースとしてこれまで肥田氏による概通常変形(nearly ordinary deformation)の場合を追求してきた．この節ではその試みと結果を紹介していきたい．まず肥田理論とは何かについての復習からはじめたい．

3.1. 肥田理論の説明. 肥田理論の説明に入る前にモジュラー形式とガロア表現について思い出しておく．重さ $k \geq 1$ の正規化された固有カスプ形式 $f = \sum a_n(f)q^n \in S_k(\Gamma_1(M))$ を考え，$\mathcal{O}_f$ を $\mathbb{Q}$ に f のフーリエ係数を全て付け加えた有限次代数体の整数環とする．このとき次のような f に付随したガロア表現の構成が知られている:

定理 3.1. [De1, DS] $\mathcal{O}_{f,\lambda}$ を p 上の素点 λ における $\mathcal{O}_f$ の完備化とするとき，ガロア群 $G_{\mathbf{Q}}$ の連続な作用をもつ階数2の自由 $\mathcal{O}_{f,\lambda}$-加群 T_f が存在し，次の性質をみたす:

1. T_f への $G_{\mathbf{Q}}$ の作用は既約かつ Mp を割る素点の外不分岐．
2. l を Mp を割らない素数とするとき，幾何的フロベニウス $\mathrm{Frob}_l \in G_{\mathbf{Q}}$ の T_f への作用のトレースは f の l でのフーリエ係数 $a_l(f)$ と一致する．

さらに $k=1$ のときは $G_{\mathbf{Q}}$ の $\mathrm{Aut}(T_f)$ における像は有限群となる．

先のガロア群 G_∞ と共に大事な役割を演じる pro-p 群 D_∞ を導入しよう．おまかには，D_∞ は $\Gamma_1(p^t)$- レベル構造をもつモジュラー曲線 $\{Y_1(p^t)_{/\mathbf{Q}}\}_{t\geq 1}$ 達の族に対するダイヤモンド作用素のなす群である．モジュラー曲線 $Y_1(p^t)$ は楕円曲線 E とその等分点 $e \in E$ の組 (E,e) をパラメトライズする．$a \in (\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z})^\times$ の $Y_1(p^t)$ 上への作用を $(E,e) \mapsto (E,ae)$ で与える．この作用のなす群をダイヤモンド作用素の群と呼ぶ．D_t を $Y_1(p^t)$ 上のダイヤモンド作用素の群の p-Sylow 部分群とし，$D_\infty = \varprojlim_t D_t$ とおく．我々は次のような標準同型を有する:

$$G_\infty \xrightarrow[\chi_{\mathrm{cyc}}]{\sim} 1+p\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p^\times, \quad D_\infty \xrightarrow[\chi_{\mathrm{dia}}]{\sim} 1+p\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p^\times.$$

以下 G_∞ の位相的生成元 g_∞ や D_∞ の位相的生成元 d_∞ をひとつ固定して話をすすめる．

１９８０年代はじめに肥田晴三氏は，ordinary なモジュラー形式たちは重さに関してよい family をなすという事実を発見し，「肥田の大きなp-進ヘッケ環」および その上の「大きなガロア表現」の理論を発展させた ([H1], [H2])．彼は，$\mathbb{Z}_p[[D_\infty]]$ 上 finite flat であるような通常ヘッケ環 $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$ や $\mathbb{Z}_p[[G_\infty \times D_\infty]]$ 上 finite flat であるような概通常ヘッケ環 $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}} = \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$ を古典的なヘッケ環の p-進的補間として構成し，さらに $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$ もしくは $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ 上のモジュラーな階数2のガロア表現も構成したのである．簡単に肥田氏の仕事の概略を思い出したい:

肥田変形 $\widetilde{T}$ の基本的性質． 肥田氏は $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$ とともにガロア群の連続な作用をもつ有限生成な $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$-加群 $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ を構成した．簡単のため, $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ に対して定まる剰余表現の既約性を仮定する．このとき, $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ は次のような性質をもつ：

1. $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ は階数 2 の自由 $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$-加群.
2. 無限素点と p を含むある $\mathbb{Q}$ の素点の有限集合 S が存在して, $\widetilde{T}$ は S の外不分岐となる.
3. $\mathrm{Spec}(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})$ の元 $\wp$: $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ が重さ $w \in \mathbb{Z}$, レベル p^t の数論的点であるとは, $\wp$ の $\mathbb{Z}_p[[D_\infty]] \subset \mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$ への制限が $\mathbb{Z}_p[[D_\infty]] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$, $d_\infty^{p^t} \mapsto \chi_{\mathrm{dia}}^w(d_\infty^{p^t})$ をみたすことをいうとする．k を 2 以上の整数とするとき, 任意の重さ $k-2$ の数論的点 $\wp$: $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ に対して, 重さ k のカスプ形式 $f_\wp$ が存在して, $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ の $\wp$ での特殊化 $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}} \wp(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})$ は, $f_\wp$ に対する *Deligne* のガロア表現 $T_{f_\wp}$ (定理 3.1 参照) と同型である.
4. p での分解群 $G_{\mathbb{Q}_p}$ の作用の下で, $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ はフィルトレーション
$$0 \longrightarrow \mathrm{F}^+\widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \mathrm{F}^-\widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow 0$$
をもち, $\mathrm{F}^+\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ と $\mathrm{F}^-\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ は階数 1 の自由 $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$-加群となる．さらに, $\mathrm{F}^+\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ は $G_{\mathbb{Q}_p}$-加群として不分岐である.
5. $\mathrm{F}^+\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ への作用を与える $G_{\mathbb{Q}_p}$ の不分岐指標を $\widetilde{\alpha}$ と記すとき, $A_p = \widetilde{\alpha}(\mathrm{Frob}_p) \in \mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$ は, 各重さ $k-2 \geq 0$ の数論的点 $\wp$ での特殊化 $\wp(A_p)$ が, $\wp$ における対応するカスプ形式 $f_\wp$ の p でのフーリエ係数 $a_p(f_\wp)$ を与える.

上の 2 の意味でこの表現はモジュラーな特殊化を稠密に含むモジュラーなガロア変形である．逆に勝手な ordinary なモジュラー形式のガロア表現は上のような通常肥田変形のある数論的点での特殊化として現れることも知られている．このような ordinary なモジュラー形式に付随したガロア表現達の親玉ともいえる大きなガロア表現の変形に対して岩澤理論を追求していくことは非常に興味深く思えるのである.

上の通常肥田変形 $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ を用いて概通常肥田変形 $\widetilde{T}$ を $\widetilde{T} = \widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[G_\infty]](\widetilde{\chi})$ で定める．$\widetilde{T}$ は自然に $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ 上の階数 2 の自由加群となる.

3.2. **肥田変形に対する岩澤理論.** 上で説明した状況においてセルマー群や p-進 L 函数, そしてそれらの間の関係を論じていきたい．$\widetilde{A}$ を $\widetilde{T} \otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ として定まる離散ガロア表現とする．$\widetilde{T}$ に対するセルマー群を $H^1(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, \widetilde{A})$ の適当な局所条件による部分群として定めたい．p における局所条件 $H^1_*(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A}) \subset$

$H^1(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A})$ を定めることで，セルマー群 $\mathrm{Sel}^*(\widetilde{T})$ を次のように定義することができる:

$$\mathrm{Sel}^*(\widetilde{T}) = \mathrm{Ker}\left[H^1(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, \widetilde{A}) \longrightarrow \prod_{l\in S, l\neq p} \frac{H^1(\mathbb{Q}_l, \widetilde{A})}{H^1_{\mathrm{ur}}(\mathbb{Q}_l, \widetilde{A})} \times \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A})}{H^1_*(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A})}\right]$$

このような p における局所条件 $H^1_*(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A})$ として $* = \mathrm{Gr}$ or BK という二通りの候補があげられる.

1. Greenberg によって提起された局所条件 $H^1_{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A}) \subset H^1(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A})$ は
$$H^1_{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A}) = \mathrm{Ker}\left[H^1(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A}) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}, \mathrm{F}^-\widetilde{A})\right],$$
というものである (ここで $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$ は $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大体とする).
2. もう一つの局所条件として考えられるのが Remark 1.1 の 4 でも触れた Bloch-Kato の局所条件 H^1_f の順極限でセルマー群の局所条件を定義するというものである. (j,k) を $1 \leq j \leq k-1$ をみたす整数の組とし, $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ の高さ 2 のイデアル $\Phi^{(j,k)}_{s,t} \subset \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ を $\Phi^{(j,k)}_{s,t} = (g^{p^s}_\infty - \chi^{j-1}_{\mathrm{cyc}}(g^{p^s}_\infty), d^{p^t}_\infty - \chi^{k-2}_{\mathrm{dia}}(d^{p^t}_\infty))$ で定める. イデアル $\Phi^{(j,k)}_{s,t}$ は g_∞ や d_∞ の選び方に依存しないことに注意したい. $\widetilde{A}$ の $\Phi^{(j,k)}_{s,t}$-ねじれ部分 $\widetilde{A}[\Phi^{(j,k)}_{s,t}]$ のポントリャーギン双対は $\mathbb{Z}_p$-加群として有限生成自由であり自然に Bloch-Kato 型の局所条件が考えられる. したがって, $\widetilde{A}$ に対する局所条件 $H^1_{\mathrm{BK}}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A}) \subset H^1(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A})$ をその順極限
$$H^1_{\mathrm{BK}}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A}) = \varinjlim_{s,t} H^1_f(\mathbb{Q}_p, \widetilde{A}[\Phi^{(j,k)}_{s,t}]),$$
で定める. (a priori にはこの定義は (j,k) の選び方に依存しうるが今の場合は以下の命題で (j,k) に依存しないこともわかる)

最初にまずセルマー群に関して次の結果が得られる:

命題 A . (1) 今の $\widetilde{T}$ に対しては, 二通りのセルマー群 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(\widetilde{T})$ と $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\widetilde{T})$ は $H^1(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, \widetilde{A})$ の部分群として (有限群の誤差もなしで) 一致する. 特に, $\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(\widetilde{T})$ の定義は (j,k) の選び方にはよらない.
(2) 上のセルマー群達のポントリャーギン双対 $\mathrm{Sel}^*(\widetilde{T})^\vee$ は有限生成ねじれ $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-加群となる.

上の結果 (1) によって, 以下 $\widetilde{T}$ に対するセルマー群は Greenberg 型か Bloch-Kato 型かに関わらず $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})$ と記すことにする.

結果 (1) は [O5, §4] において示されている. 結果 (2) は注意 1.1 の 2 でも少しふれた Kato-Rubin の結果への帰着によってわかる. 特に Greenberg 型の定義によるセルマー群に対しては, セルマー群の特殊化が比較的容易に計算できる. つまり,

$k \geq 2$ の重さでの高さ1のイデアル $P_k = (d_\infty - \chi_{\mathrm{dia}}^{k-2}(d_\infty))$ によるセルマー群の特殊化 $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})[P_k]$ を考え，それを $\widetilde{T}$ の (P_k) での特殊化 $\widetilde{T}/(P_k)\widetilde{T}$ に対する Greenberg 型のセルマー群 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\widetilde{T}/(P_k)\widetilde{T})$ と比べるのである．$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\widetilde{T}/(P_k)\widetilde{T})$ のポントリャーギン双対は先述の Kato-Rubin の結果により1変数の岩澤代数 $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ 上の加群としてねじれ加群となる．今の場合には自然な制限写像 $\mathrm{Sel}(\widetilde{T}/(P_k)\widetilde{T}) \longrightarrow \mathrm{Sel}(\widetilde{T})[P_k]$ の kernel や cokernel があまり大きくないことが計算され，それによって $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee$ の商 $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee/(P_k)\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee$ もねじれ $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-加群であることがわかる．したがってもとの $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee$ は2変数の代数 $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ 上の加群としてねじれ的でなければならない．ここで用いる制限写像による Greenberg 型のセルマー群の特殊化の議論については [O4] を参照されたい．

上記のねじれ性の結果により次のような問題が自然に想起される．

問題． $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-加群 $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee$ の特性イデアルはどのような意味をもつか？特に *Greenberg* の提案する「ガロア変形の岩澤主予想」の観点から p-進 L 函数による説明がつくだろうか？

この問題に対してはオイラー系的手法でのアプローチを以下試みたい．つまりオイラー系を仲立ちとして

$$p\text{-進 } L \text{ 函数} \overset{\text{定理 B}}{\Longleftrightarrow} \text{オイラー系} \overset{\text{定理 C}}{\Longleftrightarrow} \text{セルマー群の特性イデアル}$$

という2ステップの議論で上の解析的対象と代数的対象を結びつけたい．今の場合は加藤氏による Beilinson-Kato 元を用いて2変数のよいオイラー系が構成されることも非常な利点である．そのオイラー系について少し詳細に説明を述べるためまずモジュラー形式のいくつかの必要な基本事項について復習したい．

$\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ を複素数体 $\mathbb{C}$ の複素共役とする．各重さ $k-2 \geq 0$ の数論的点 $\wp : \mathbb{H}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ ごとに，$f_\wp = \sum_{n>0} a_n(f_\wp)q^n$ の q-展開の係数を複素共役でひねったもの $\overline{f}_\wp = \sum_{n>0} a_n(f_\wp)^\sigma q^n$ を考える．この $\overline{f}_\wp$ はまた重さ $k \geq 2$ の固有カスプ形式となりその Neben 指標は $f_\wp$ の Neben 指標の双対ディリクレ指標となる．$\overline{f}_\wp$ を $f_\wp$ の双対モジュラー形式と呼ぶ．$\mathbb{Q}_{\overline{f}_\wp}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ に $\overline{f}_\wp$ の全てのフーリエ係数を添加して得られる有限次代数体とする．$\overline{f}_\wp$ に対してド・ラーム実現 $V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_\wp)$ と呼ばれる2次元 $\mathbb{Q}_{\overline{f}_\wp}$-ベクトル空間が付随させられる．このド・ラーム実現 $V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_\wp)$ は次のような性質をもつ:

1. ベクトル空間 $V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_k)$ はド・ラーム フィルトレーションと呼ばれる減少フィルトレーション $\mathrm{Fil}^i V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_k) \subset V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_\wp)$ を備えており，$\mathrm{Fil}^0 V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_\wp) = V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_\wp)$ かつ $\mathrm{Fil}^k V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_\wp) = \{0\}$ をみたす．

2. $1 \le j \le k-1$ なる整数 j に対して, $\mathrm{Fil}^j V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_{\wp})$ は $\overline{f}_{\wp}$ で生成されるモジュラー形式の空間の部分 $\mathbb{Q}_{\overline{f}_{\wp}}$-ベクトル空間 $\mathbb{Q}_{\overline{f}_{\wp}} \cdot \overline{f}_{\wp}$ と自然に同一視される.
3. $\widehat{\mathbb{Q}}_{\overline{f}_{\wp}}$ を $\mathbb{Q}_{\overline{f}_{\wp}}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の中での完備化とする. このとき $\mathrm{Fil}^{k-j} V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_{\wp}) \otimes_{\mathbb{Q}_{\overline{f}_{\wp}}} \widehat{\mathbb{Q}}_{\overline{f}_{\wp}}$ は $\mathrm{Fil}^0 \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}((V^{(\wp)})^*(1-j))$ との自然な同一視をもつ. ここで $V^{(\wp)}$ は $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ の $\wp$ での特殊化 $T^{(\wp)} = \widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}} \wp(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})$ の係数拡大 $T^{(\wp)} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ であり, $(\ )^*$ はここでは $\mathbb{Q}_p$-線形双対をとる操作を表す.

重さ $k-2$ の数論的点 $\wp \in \mathrm{Spec}(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})$ と $1 \le j \le k-1$ を満たす整数 j に対して, 自然な同一視 $\mathrm{Fil}^{k-j} V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_{\wp}) = \mathbb{Q}_{\overline{f}_{\wp}} \cdot \overline{f}_{\wp}$ による $\overline{f}_{\wp}$ の像として得られる $\mathrm{Fil}^{k-j} V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_{\wp})$ の $\mathbb{Q}_{\overline{f}_{\wp}}$-基底を $\overline{\delta}^{\mathrm{dR}}_{\wp}$ で記すことにする. また, 重さ $k-2$ の数論的点 $\wp \in \mathrm{Spec}(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})$ と $\chi_{\mathrm{cyc}}^{j-1} : G_\infty \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ から引き起こされる特殊化写像 $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を $s_{(j,\wp)}$ で記すことにする. $T^{(j,\wp)}$ を $\widetilde{T}$ の $s_{(j,\wp)}$ における特殊化 $\widetilde{T} \otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}} s_{(j,\wp)}(\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}})$ とする.

加藤氏の仕事 [Ka3] によって楕円モジュラー曲線 $Y(M)$ の K_2-群の中に L 函数の値と結びつくよいノルム系をなす元 (Beilinson-Kato 元) が構成されている. この加藤氏の元は Chern 類写像等を用いてエタールコホモロジー $H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^s}), H^1_{\text{ét}}(Y_1(Np^t)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p))$ の中に写され s や t に関してノルム系をなす. 肥田氏による概通常変形 $\widetilde{T}$ の構成自体が $Y_1(Np^t)_{/\mathbb{Q}(\zeta_{p^s})}$ のエタールコホモロジー $H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^s}), H^1_{\text{ét}}(Y_1(Np^t)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p))$ 達のノルムによる逆極限を用いてなされていた事実 [H2] により, 加藤氏の元から「2 変数のオイラー系」が得られる. 以下にこれらについてまとめておきたい:

命題 3.2. [Ka3] $\mathcal{R}$ を p と素な *square-free* な自然数達のなす集合とする. コホモロジーの元の系 $\left\{ \mathcal{Z}(r) \in H^1(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_r), \widetilde{T}^*(1)) \right\}_{r \in \mathcal{R}}$ で次のような性質をもつものが存在する:

1. 各 *square-free* な自然数 r に対して $\mathcal{Z}(r)$ は p 上の素点の外不分岐である.
2. r を p と素な *square-free* な自然数とし, q を r の素因子のひとつとする. r/q を r' と記す. このとき, $\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\zeta_r)/\mathbb{Q}(\zeta_{r'})} \mathcal{Z}(r)$ は $P_q(\mathrm{Frob}_q)\mathcal{Z}(r')$ と一致する. ここで, $P_q(X) \in \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}[X]$ を多項式 $\det(1 - \mathrm{Frob}_q X; \widetilde{T})$ で表し, $\mathrm{Frob}_q \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{r'})/\mathbb{Q})$ を q における幾何的フロベニウスとする.
3. $\mathcal{Z}(1) \in H^1(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, \widetilde{T}^*(1))$ の $s_{(j,\wp)}$ での特殊化を $z^{(j,\wp)}(1) \in H^1(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, (T^{(j,\wp)})^*(1))$ で記す. このとき, $z^{(j,\wp)}(1)$ の局所化

$$H^1(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, (T^{(j,\wp)})^*(1)) \xrightarrow{\mathrm{loc}_p} H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, (T^{(j,\wp)})^*(1)) := \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, (T^{(j,\wp)})^*(1))}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, (T^{(j,\wp)})^*(1))}$$

による像 $\mathrm{loc}_p(z^{(j,\wp)}(1)) \in H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, (T^{(j,\wp)})^*(1))$ の加藤氏 [Ka1] の定義した *dual exponential map*

$$H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, (T^{(j,\wp)})^*(1)) \xrightarrow{\exp^*} \mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}((V^{(j,\wp)})^*(1))$$

による行き先 $\exp^*(\mathrm{loc}_p(z^{(j,\wp)}(1))) \in \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}((V^{(j,\wp)})^*(1))$ は $\mathrm{Fil}^0 V_{\mathrm{dR}}(\overline{f}_\wp)(k-j) \subset \mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}((V^{(j,\wp)})^*(1))$ に含まれる.

4. さらに, $\exp^*(\mathrm{loc}_p(z^{(j,\wp)}(1)))$ は $\dfrac{L_{(p)}(f_\wp, \omega^{1-j}, j)}{(2\sqrt{-1}\pi)^{j-1}C^{(-1)^{j-1}}_{\infty,k}} \cdot \overline{\delta}^{\mathrm{dR}}_\wp$ に等しい. ここで, $C^{\pm}_{\infty,\wp} \in \mathbb{C}$ は複素周期である. (ド・ラーム実現やベッチ実現の基底をうまく選ぶことにより $C^{(-1)^{j-1}}_{\infty,\wp}$ には標準的な正規化がある [O5, §3]).

2変数 p-進 L 函数の構成とその補間性質の記述に大切な役割を演じる $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$-加群 $\mathcal{D}$ と p-進周期を導入したい. まず $\mathcal{D}$ を $\mathcal{D} = (\mathrm{F}^+\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\widehat{\mathbb{Z}}^{\mathrm{ur}}_p)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ で定義する. $\mathcal{D}$ は次のような性質をもつ ([O5, §3] 参照):

1. $\mathcal{D}$ は階数1の自由 $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$-加群となる.
2. 重さ $k-2$ の数論的点 $\wp \in \mathrm{Spec}(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})$ $1 \leq j \leq k-1$ となる整数 j に対して, 標準的同型 $\mathcal{D} \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(j)) \otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}} \wp(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}) \cong \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^{(j,\wp)})/\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^{(j,\wp)})$ がある.

$\mathcal{D}$ の $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$-基底 d をひとつ固定しておく. 固定した1の原始 p^n 乗根のノルム系 $\{\zeta_{p^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ により, 同型 $D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(1)) \cong \mathbb{Q}_p$ が定まりその同型での $1 \in \mathbb{Q}_p$ の引き戻しを $\delta_{\mathbb{Q}_p(1)}$ と記しておく. これにより, 重さ $k-2 \geq 0$ の数論的点 $\wp\colon \mathbb{H}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ と整数 j ごとに d から1次元ベクトル空間 $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^{(j,\wp)})/\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^{(j,\wp)})$ の基底 $d^{(j,\wp)} = \wp(d) \otimes \delta^{\otimes j}_{\mathbb{Q}_p(1)}$ が定まることに注意したい. p-進周期を次のように定義する.

定義 3.3. $\mathcal{D}$ の $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$-基底 d をひとつ固定したとき各重さ $k-2$ の数論的点 $\wp \in \mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$ における p-進周期 $C_{p,\wp,d}$ はド・ラームペアリング:

$$\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}((V^{(j,k)})^*(1)) \times \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^{(j,\wp)})/\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^{(j,\wp)}) \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(K_\wp(1)) \cong K_\wp$$

を用いて, $C_{p,\wp,d} = \langle \overline{\delta}^{\mathrm{dR}}_\wp, d^{(j,k)} \rangle$ で定義される (ここで $K_\wp$ は $\wp(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})$ の分数体とする).

1の原始 p^n 乗根のノルム系 $\{\zeta_{p^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ を固定していることにより, p-進周期 $C_{p,\wp,d}$ は j には依存せず d のみによる. 命題 3.2 と上の p-進周期 $C_{p,\wp,d}$ の定義により $\exp^*(\mathrm{loc}_p(z^{(j,\wp)}(1)))/C_{p,\wp,d} \in \mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}((V^{(j,\wp)})^*(1))$ のペアリング:

$$\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}((V^{(j,\wp)})^*(1)) \xrightarrow{\langle\ ,d^{(j,\wp)}\rangle} K_\wp$$

による像は L 函数の特殊値 $\dfrac{L_{(p)}(f_{\wp},\omega^{1-j},j)}{(2\pi\sqrt{-1})^{j-1}C_{\infty,\wp}^{(-1)^{j-1}}}\in\overline{\mathbb{Q}}$ と一致する. したがって, このような L 函数の特殊値を $\wp$ や j を様々に動かすときに補間する p-進 L 函数を得るためにはこの dual exponantial map を $\wp$ や j に関して補間することが必要となってくる. 実際, 次の定理 B がそのような dual exponantial map を補間する 2 変数コールマン写像を与える定理である

定理 B . [O5, Theorem 3.14] 上で導入された $\mathcal{D}$ の $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$-基底 d をひとつ固定しておく. $H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p,\widetilde{T}^*(1))$ を逆極限 $\varprojlim_{s,t} H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p,\widetilde{T}^*(1)/(g_\infty^{p^s}-1,d_\infty^{p^t}-1)\widetilde{T}^*(1))$ で定める. $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ は *UFD* であると仮定する. このとき $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-準同型 $\Xi_d:\ H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p,\widetilde{T}^*(1))\longrightarrow\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ で次の性質をもつものが構成される:

(1) Ξ_d は $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-準同型として擬同型となる. つまり, $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}\subset\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ において, Ξ_d の $\mathfrak{p}$ での局所化が同型となる.
(2) コホモロジーの元 $\mathcal{C}\in H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p,\widetilde{T}^*(1))$ を与えるとき次の補間性質がある. $1\le j\le k-1$ として, 重さ $k-2$ の数論的点 $\wp:\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$ と重さ $j-1$ の数論的指標 $\chi_{\mathrm{cyc}}^{j-1}:\ G_\infty\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$ から引き起こされる特殊化 $s_{(j,\wp)}:\ \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$ ごとに等式:

$$s_{(j,\wp)}(\Xi_d(\mathcal{C}))=\left(1-\frac{\omega^{1-j}(p)p^{j-1}}{a_p(f_\wp)}\right)\left(1-\frac{\omega^{1-j}(p)a_p(f_\wp)}{p^j}\right)^{-1}\langle\exp^*(c^{(j,\wp)}),d^{(j,\wp)}\rangle,$$

がある. ここで, $c^{(j,\wp)}\in H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p,(T^{(j,k)})^*(1))$ は $\mathcal{C}\in H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p,\widetilde{T}^*(1))$ の $s_{(j,\wp)}$ による特殊化である.

特に, $\mathcal{C}$ として上で導入された Beilinson-Kato 元 $\mathcal{Z}(1)$ をとり, 上の定理 B の結果にあてはめることで次のような p-進 L 函数の構成が得られる:

系 B . 仮定や設定は上記定理 *B* の通りとする. $L_{p,d}^{\text{Bei-K}}(\widetilde{T})\in\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ を $L_{p,d}^{\text{Bei-K}}(\widetilde{T}):=\Xi_d(\mathcal{Z}(1))$ とおく. $1\le j\le k-1$ として, 重さ $k-2$ の数論的点 $\wp:\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$ と重さ $j-1$ の数論的指標 $\chi_{\mathrm{cyc}}^{j-1}:\ G_\infty\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$ から引き起こされる特殊化 $s_{(j,\wp)}:\ \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$ を考えるごと等式:

$$s_{(j,\wp)}(L_{p,d}^{\text{Bei-K}}(\widetilde{T}))/C_{p,\wp,d}=(-1)^{j-1}(j-1)!\left(1-\frac{\omega^{1-j}(p)p^{j-1}}{a_p(f_\wp)}\right)\frac{L(f_\wp,\omega^{1-j},j)}{(2\pi\sqrt{-1})^{j-1}C_{\infty,\wp}^{(-1)^{j-1}}}$$

が成り立ち, また次の関係が成立する:

$$\mathrm{char}_{\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}}(H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p,\widetilde{T}^*(1))/\mathcal{Z}(1))=(L_{p,d}^{\text{Bei-K}}(\widetilde{T})).$$

注意 3.4. 上で $\widetilde{T}$ に付随した Beilinson-Kato 元を用いた 2 変数 p-進 L 函数の構成を与えたわけであるが, 概通常変形 $\widetilde{T}$ に対する 2 変数 p-進 L 函数は上の仕事以前に Mazur, Ohta, Kitagawa[Ki], Greenberg-Stevens[GS] らによっても Λ-進モジュラーシンボルの手法により別の構成が与えられている. 彼らは, 普通のモジュラーシンボルの空間を補間するような $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$-加群 $\mathcal{B}$ を導入し, $\mathcal{B}$ の $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$-基底 b を固定するごとに p-進周期 $C^{\pm}_{p,\wp,b}$ 達を定義し, 2 変数 p-進 L 函数を $L_{p,b}(\widetilde{T}) \in \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ を構成した. この $L_{p,b}(\widetilde{T}) \in \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ も $L^{\mathrm{Bei\text{-}K}}_{p,d}(\widetilde{T})$ と同様の補間性質:

$$s_{(j,\wp)}(L_{p,b}(\widetilde{T}))/C^{\pm}_{p,\wp,b} = (-1)^{j-1}(j-1)!\left(1 - \frac{\omega^{1-j}(p)p^{j-1}}{a_p(f_\wp)}\right)\frac{L(f_\wp, \omega^{1-j}, j)}{(2\pi\sqrt{-1})^{j-1}C^{(-1)^{j-1}}_{\infty,\wp}}$$

をみたす. ここで次のようなことを注意しておきたい.

1. Greenberg-Stevens らの構成法と今回の構成法が全くことなる手法であるということだけでなく, $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ のイデアルとしての $(L_{p,b}(\widetilde{T}))$ と $(L^{\mathrm{Bei\text{-}K}}_{p,d}(\widetilde{T}))$ の関係が明らかでないことがある. 問題となるのは cyclotomic tower とは限らないガロア変形を考えることで新しく現れるある種の誤差項である p-進周期が未だよくわからないことであるといえる.
2. またさらに同じモジュラーシンボル的な構成同志でも実はモジュラーシンボルの補間空間 $\mathcal{B}$ の構成の仕方が少しずつ異なるため, 例えば Greenberg-Stevens の p-進 L 函数と Kitagawa の p-進 L 函数でも p-進周期のお互いの関係が完全には明らかではない. つまり $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ のイデアルとして一般には一致しないようである.

このように一般の「ガロア変形の岩澤理論」では p-進 L 函数の存在および構成の問題と並んで例え p-進 L 函数が構成されてもその適当な条件下での一意性や良い特徴づけの哲学がわからないという問題が新しく生じてくるのである. 第 1 節で述べた cyclotomic tower の場合には, p-進 L 函数が存在すれば一意であったこと (注意 1.1 の 3 参照) と比べて p-進 L 函数の存在予想などの枠組みも不明な点が未だ残されている.

さて上で構成された 2 変数 p-進 L 函数 $L^{\mathrm{Bei\text{-}K}}_{p,d}(\widetilde{T})$ を用いて我々は次のような 2 変数の肥田変形に対する岩澤主予想を提起したい.

岩澤主予想 (2 変数肥田変形の場合) . $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ のイデアルの間の等式:

$$\mathrm{char}_{\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}}(\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^{\vee}) = (L^{\mathrm{Bei\text{-}K}}_{p,d}(\widetilde{T})).$$

が成り立つ (ここで イデアル $(L^{\mathrm{Bei\text{-}K}}_{p,d}(\widetilde{T}))$ は $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-基底 $d \in \mathcal{D}$ の選び方によらないことに注意したい).

先にも述べた Greenberg 氏の論説 [Gr1] でも上のタイプの 2 変数主予想は提起されていることにも注意したい. ただ [Gr1] においてはどの 2 変数 p-進 L 函数をとるべきかなど設定がぼかされていたことがある. 上で Beilinson-Kato 元から構成した 2 変数 p-進 L 函数が正しいセルマー群の対応物であると現時点では信じているのである.

定義 3.5. 概通常変形 $\widetilde{T}$ が条件 (Im) をみたすとは二つの元 $\tau, \tau' \in G_{\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})}$ で次のような条件をみたすものが存在することをいう:

1. $\widetilde{T}$ の $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-基底達を固定したときにガロア表現 $G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\widetilde{T}) \cong GL_2(\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}})$ における τ の像が $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ のある元 $P_\tau \neq 0$ を用いて $\begin{pmatrix} 1 & P_\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なる表示を満たす.
2. $\widetilde{T}$ の $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-基底達を固定したときにガロア表現 $G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\widetilde{T}) \cong GL_2(\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}})$ における τ' の像が $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ のある元 $U_\tau \neq 1$ を用いて $\begin{pmatrix} U_{\tau'} & 0 \\ 0 & U_{\tau'}^{-1} \end{pmatrix}$ なる表示を満たす

ここで, 上の二つの基底の選び方は必ずしも同じでなくてもよいことに注意したい.

上の条件 (Im) は考えている概通常変形が CM 型でない場合は常にみたされることも知られている (例えば [Fi] を参照). 条件 (Im) を満たす $\tau, \tau' \in G_{\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})}$ に対して $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ のイデアル $\mathfrak{A}_\tau \subset \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$, $\mathfrak{B}_{\tau'} \subset \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ を高さ 1 のイデアル $\mathfrak{A}_\tau = (P_\tau)$, $\mathfrak{B}_{\tau'} = (U_{\tau'} - 1)$ として定める.

今まで述べてきた結果により 2 変数 p-進 L 函数 $L_{p,d}^{\text{Bei-K}}(\widetilde{T}) \in \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ が構成されるとともに, 構成法から $L_{p,d}^{\text{Bei-K}}(\widetilde{T})$ はオイラー系の元 $\mathcal{Z}(1)$ と結びつきがあった. したがって望むべき 2 変数 p-進 L 函数とセルマー群との関係を得るためには, オイラー系をセルマー群と結びつける結果が必要となる. 次の定理 C がその部分的結果をあたえている:

定理 C . [O6, Theorem 2.7] ある $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成自由な完備離散付値環 $\mathcal{O}$ が存在して, $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ が $\mathcal{O}$ 上の 2 変数巾級数環 $\mathcal{O}[[X_1, X_2]]$ に同型であると仮定する. $\widetilde{T}$ は条件 (Im) を満たすと仮定しそのような $\tau, \tau' \in G_{\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})}$ を固定しておく. このとき次のような特性イデアルの間の包含関係がある:

$$\mathrm{char}_{\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}}(\mathfrak{A}_\tau \mathfrak{B}_{\tau'} \mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee) \subset \mathrm{char}_{\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}}(H_{/f}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{T}^*(1))/\mathcal{Z}(1))).$$

CM 型でない $\widetilde{T}$ の中でもかなり一般のクラスの $\widetilde{T}$ では $\mathfrak{A}_\tau = \mathfrak{B}_{\tau'} = (1)$ となる. そのような場合の正確な評価を次の系として記しておく.

系 C．$\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ が $\mathcal{O}$ 上の２変数巾級数環 $\mathcal{O}[[X_1, X_2]]$ に同型であると仮定する．次の条件を仮定しよう：

(SL) 通常ガロア表現 $G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}) \cong GL_2(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})$ によるガロア群の像は $SL_2(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})$ を含む．

この条件 **(SL)** の下で次の包含関係：

$$\mathrm{char}_{\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}}((H_{/f}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{T}^*(1))/\mathcal{Z}(1))) \subset \mathrm{char}_{\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}}(\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^{\vee})$$

が成り立つ．

$p \neq 2$ より定理 C から系 C を導くには例えば $P_{\tau} = 1$, $U_{\tau'} = -1$ をみたすような $\tau, \tau' \in G_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})}$ をとれば十分である．また条件 **(SL)** が実際どのようなときに成立かするかといった十分条件などについては, [MW2] の Boston による appendix および [Fi] を参照のこと．

命題 A, 定理 B, 系 B, 定理 C, 系 C らをまとめて次を得る：

主定理．肥田の概通常変形 $\widetilde{T}$ に対して次が成り立つ：

(1) セルマー群 $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})$ のポントリャーギン双対 $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^{\vee}$ は有限生成ねじれ $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-加群である．

(2) 概通常変形 $\widetilde{T}$ は CM 型でないと仮定し, さらに $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ が $\mathcal{O}$ 上の２変数巾級数環 $\mathcal{O}[[X_1, X_2]]$ に同型であると仮定する．条件 **(Im)** を満たす $\tau, \tau' \in G_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})}$ を一つ固定すると包含関係 $(L_{p,d}^{\mathrm{Bei\text{-}K}}) \subset \mathrm{char}_{\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}}(\mathfrak{A}_{\tau}\mathfrak{B}_{\tau'}\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^{\vee})$ がある．

4. 結果の証明と応用および補足について

4.1. ２変数コールマン写像の証明について． 定理 B で述べた２変数コールマン写像の構成および証明は考えているガロア変形が概通常的であるという性質を用いて古典的な１次元表現に付随したコールマンの理論へと帰着するのがアイデアである．

定理 B で考える補間写像 Ξ_d に現れる $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-加群 $H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{T}^*(1))$ について次のことが示される [O5]:

1. $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-加群のペアリング：

$$H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{T}^*(1)) \times H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{F}^+\widetilde{T}) \longrightarrow \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$$

がある．

2. $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ の任意の高さ１の素イデアル $\mathfrak{p} \subset \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ に対して局所化 $H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{T}^*(1))_{\mathfrak{p}}$ と $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{F}^+\widetilde{T})$ はともに階数１の自由 $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}_{\mathfrak{p}}$-加群であり, 上のペアリングの $\mathfrak{p}$ での局所化は, パーフェクトペアリングを与える．

exponential map exp と dual exponential map exp* の間にはよい双対性があり [Ka1], これと上の1で与えられるペアリングを合わせて, ガロアコホモロジー $H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{T}^*(1))$ において dual exponential map を補間する問題はガロアコホモロジー $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{F}^+\widetilde{T})$ において exponantial map を補間する問題に帰着される. つまり次を示せばよいことになる.

命題 4.1. $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-準同型 $\Theta:\ \mathcal{D}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[[G_\infty]] \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{F}^+\widetilde{T})$ で次の性質をもつものが構成される:

(1) Θ は $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$-準同型として擬同型となる.

(2) 次の補間性質がある. $1 \le j \le k-1$ として, 重さ $k-2$ の数論的点 $\wp : \mathbb{H}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ と重さ $j-1$ の数論的指標 $\chi^{j-1}_{\mathrm{cyc}}:\ G_\infty \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ から引き起こされる特殊化 $s_{(j,\wp)}:\ \mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ ごとに可換図式:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[[G_\infty]] & \xrightarrow{\ \Theta\ } & H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{F}^+\widetilde{T}) \\
{\scriptstyle s_{(j,\wp)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_{(j,\wp)}} \\
\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{F}^+V(\chi^j_{\mathrm{cyc}})) & \xrightarrow[\exp]{} & H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{F}^+V(\chi^j_{\mathrm{cyc}})).
\end{array}$$

がある.

上で現れた $\mathbb{H}^{\mathrm{n.ord}}$ 上自由かつ階数1の $G_{\mathbb{Q}}$-表現 $\mathrm{F}^+\widetilde{T}$ は $\mathrm{F}^+\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}\widehat{\otimes}\mathbb{Z}_p[[G_\infty]](\widetilde{\chi})$ で与えられる. 不分岐表現の family である $\mathrm{F}^+\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ の方については, exponential map の補間の問題は容易であり, したがってガロアコホモロジー

$$H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_p), \mathbb{Z}_p[[G_\infty]](\widetilde{\chi})) \cong \varprojlim_s H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s}), \mathbb{Z}_p(1))$$

において exponential map を補間することが問題となってくる. クンマー理論より $H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s}), \mathbb{Z}_p(1))$ は局所体 $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s})$ の主単数群 $U^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s}))$ と同一視され, また, Bloch-Kato の exponential map $D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(1))_{/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s})} \xrightarrow{\exp} H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s}), \mathbb{Q}_p(1))$ は同一視 $D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(1))_{/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s})} \cong \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s})$ および $H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s}), \mathbb{Q}_p(1)) \cong U^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s})) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ により古典的な p-進 exponential map $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s}) \xrightarrow{\exp} U^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^s})) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ と一致する. このような局所単数群に対する exponential map の補間の問題はコールマンによって示されており (例えば [Wa] など参照), かくして問題はコールマンの以前の結果へと帰着される.

以上は途中の議論を省いた少しデフォルメした粗い説明であったが, ポイントは考えているガロア変形の概通常性より exponential map (や dual exponantial map) の補間の問題が階数1の表現の場合に帰着できること, そして階数1の場合にはコー

ルマンによる局所単数群の tower に対するコールマン写像の結果に帰着されることと言える．これらのステップの細かい議論については [O5] を参照されたい．

上で述べたのと少し状況が異なるが，モジュラー曲線の K_2-群の系からのコールマン写像の理論も深谷氏により研究されている [Fu1]．この [Fu1] の応用としても Beilinson-Kato 元による 2 変数 p-進 L 函数の構成がアナウンスされていることにも言及しておきたい [Fu2]．

4.2. **オイラー系の理論の証明について．** ガロア表現の変形に対するオイラー系の議論は特に第 3 節の 2 変数概通常変形の場合に限らずにより一般の場合で定式化を与えておいた方が後の応用上も有用と思われる．ある $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成自由な完備離散付値環 $\mathcal{O}$ 上の n 変数巾級数環 $\mathcal{O}[[X_1, X_2, \cdots, X_n]]$ を $\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$ で記す．この節では $\widetilde{T}$ を $G_{\mathbb{Q}}$ の連続な作用をもち，ある素点の有限集合 S の外不分岐な $\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$ 上の階数 2 の自由加群とする．この節においても，簡単のため $\widetilde{T}$ の剰余表現 $\widetilde{T}/(\pi, X_1, \cdots, X_n)\widetilde{T}$ が既約であると常に仮定して話を進める．

定義 4.2. $\mathcal{R}$ を S と素な square-free な自然数達のなす集合とする．コホモロジーの元の系 $\left\{\mathcal{Z}(r) \in H^1(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_r), \widetilde{T}^*(1))\right\}_{r\in\mathcal{R}}$ は次の性質が成り立つとき $(\widetilde{T}, \Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)})$ に対するオイラー系とよばれる:

1. 各 square-free な自然数 r に対して $\mathcal{Z}(r)$ は S 上の素点の外で不分岐である．
2. r を p と素な square-free な自然数とし，q を r の素因子のひとつとする．r/q を r' と記す．このとき，$\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\zeta_r)/\mathbb{Q}(\zeta_{r'})}\mathcal{Z}(r)$ は $P_q(\mathrm{Frob}_q)\mathcal{Z}(r')$ と一致する．ここで，$P_q(X) \in \Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}[X]$ を多項式 $\det(1 - \mathrm{Frob}_q X; \widetilde{T})$ で表し，$\mathrm{Frob}_q \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{r'})/\mathbb{Q})$ を q における幾何的フロベニウスとする．

$\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$-加群 $\text{Ш}^2_S(\widetilde{T}^*(1))$ を

$$\text{Ш}^2_S(\widetilde{T}^*(1)) = \mathrm{Ker}[H^2(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, \widetilde{T}^*(1)) \longrightarrow \bigoplus_{v\in S} H^2(\mathbb{Q}_v, \widetilde{T}^*(1))]$$

で定義する．$\widetilde{T}$ のガロア表現の像の大きさの条件 (**Im**), $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{B}_{r'}$ 等を定義 3.5 と同様に定める．$(\widetilde{T}, \Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)})$ に対するオイラー系 $\left\{\mathcal{Z}(r) \in H^1(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_r), \widetilde{T}^*(1))\right\}_{r\in\mathcal{R}}$ が与えられたとき次のような定理を一般的に示す．

定理 4.3. [O6, Theorem 2.6] $\{\mathcal{Z}(r) \in H^1(\mathbb{Q}(\zeta_r), \widetilde{T}^*(1))\}_{r\in\mathcal{R}}$ を $(\widetilde{T}, \Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)})$ に対するオイラー系とする．次の条件達を仮定しよう:

(i). $\mathcal{Z}(1) \in H^1(\mathbb{Q}, \widetilde{T}^*(1))$ が $H^1(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, \widetilde{T}^*(1))$ の $\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$-ねじれ部分に入らない．
(ii). 複素共役による $\pm$-固有空間 $\widetilde{T}^{\pm}$ はともに階数 1 の $\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$-加群となる．
(iii). S に含まれる悪い素点を含めたすべての有限素点 v において，$H^2(\mathbb{Q}_v, \widetilde{T}^*(1))$ はねじれ $\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$-加群となる．

さらに, $\widetilde{T}$ のガロア表現による像が (Im) を満たすと仮定し, (Im) を満たす $\tau, \tau' \in G_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})}$ を固定しておく. このとき次が成り立つ：

(1) $Ш^2_S(\widetilde{T}^*(1))$ は有限生成ねじれ $\Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}}$-加群となる.

(2) 次のような特性イデアルの間の包含関係が成立する：

$$\mathrm{char}_{\Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}}}(H^1(G_S, \widetilde{T}^*(1))/\mathcal{Z}(1)\Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}}) \subset \mathrm{char}_{\Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}}}(\mathfrak{A}_\tau \mathfrak{B}_{\tau'} Ш^2_S(\widetilde{T}^*)).$$

この定理の特別な場合によって前節の定理 C が導かれる. まず上の定理 4.3 の条件 (i) から (iii) までは $\widetilde{T}$ として肥田氏の 2 変数概通常変形をとるときには (i) 以外は, モジュラーなガロア表現の基本性質としてただちに導かれるものである. $\widetilde{T}$ が 2 変数概通常変形, $\mathcal{Z}(1)$ が Beilinson-Kato 元のときに条件 (i) が満たされることは定理 B の結果と定理 B の写像 Ξ_d による 2 変数 p-進 L 函数 $L^{\text{Bei-K}}_{p,d}(\widetilde{T}) \in \mathbb{H}^{\text{n.ord}}$ が non-zero であることから初めて従う性質であることに注意したい.

今, ガロアコホモロジーの Global duality theorem によって次の完全系列がある:

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, \widetilde{T}^*(1))/\mathcal{Z}(1)\Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}} &\longrightarrow H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{T}^*(1))/\mathrm{loc}_p(\mathcal{Z}(1))\Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}} \\ &\longrightarrow \mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee \longrightarrow Ш^2_S(\widetilde{T}^*(1)) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

上の定理 4.3 により端の二つの $\mathbb{H}^{\text{n.ord}}$-加群 $H^1(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, \widetilde{T}^*(1))/\mathcal{Z}(1)\Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}}$ と $Ш^2_S(\widetilde{T}^*(1))$ の間の特性イデアルの包含関係が示されていることより, 定理 C で望んでいた真中の二つの $\mathbb{H}^{\text{n.ord}}$-加群 $H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, \widetilde{T}^*(1))/\mathrm{loc}_p(\mathcal{Z}(1))\Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}}$ と $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee$ の間の包含関係が導かれるのである.

以下, 定理 4.3 のオイラー系の理論の証明についてもう少し説明を加えたい. 証明は大きく分けて二つのステップからなる：

1. 岩澤加群の特性イデアルをその特殊化による振る舞いで特徴づける.
2. 表現 $\widetilde{T}$ が完備離散付値環上の場合 ($n = 0$ のとき) のオイラー系の理論の証明に帰着する

つまり, 岩澤加群の特殊化の理論を整備することにより変数の数 n に関する帰納法で示していくのである.

まずステップ 1 の特性イデアルの特徴づけについて少し述べたい. ナイーブには次のような問題を考える.

二つのねじれ $\Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}}$-加群 M と N が与えられたとする. このとき, $\Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}}$ の高さ 1 の素イデアルの無限族 (test family) $\mathcal{F} = \{\mathfrak{p} \subset \Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}}\}$ で次のようなものが存在するか？

1. $\Lambda^{(n)}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}$ は $\mathcal{O}$ 上の $(n-1)$-変数の巾級数環と同型.

2. ほとんどすべての $\mathfrak{p} \in \mathcal{F}$ に対して $\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M) \subset \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}/\mathfrak{p}}(N/\mathfrak{p}N)$ が成り立てばもともと $\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}}(M) \subset \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}}(N)$ が成り立つ.

上の $\mathcal{F}$ として勝手に1のみをみたす高さ1の素イデアル達の無限集合をとってきたのでは2は一般に満たされないことは直ちにわかる. したがって2を満たすためには十分多くの高さ1の素イデアルによるテストが必要となるのである. もしこのような問題が正確に定式化されれば, $M = H^1(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, \widetilde{T}^*(1))/\mathcal{Z}(1)\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$ と $N = \mathfrak{A}_r\mathfrak{B}_{r'}\text{Ш}^2_S(\widetilde{T}^*(1))$ に対して上の原理を十分たくさんの $\mathfrak{p} \in \mathcal{F}$ に適用することで $(\widetilde{T}/\mathfrak{p}, \Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)})$ のオイラー系 $\mathcal{Z}(r) \bmod \mathfrak{p}$ ごとに上の定理 4.3 を示せばよく, 証明は n に関する帰納法に持ちこまれる.

このような特性イデアルの特徴づけ原理は上のナイーブな形そのままでは成立しない. またこのような素朴な問題であるにも関わらず筆者の知る限りではこのようなことを記述する文献はないようである. 以下少しだけそのような特徴づけ原理について説明しておく. まず test family $\mathcal{F}$ として, 我々は下の定義で与えるような $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(n)}$ を考える.

定義 4.4. 1. $\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)} \cong \mathcal{O}[[X_1, \cdots, X_n]]$ の線形的元 l とは係数 $a_i \in \mathcal{O}$ をもつ(斉次)次数が1の多項式 $l = a_0 + a_1X_1 + \cdots a_nX_n \in \Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$ で l は素元 $\pi_{\mathcal{O}}$ で割り切れずまた $\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$ の中で可逆ではないものとする.

2. $\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$ の線形元で生成されるイデアル全体の集合を $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(n)}$ で表す. つまり:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(n)} = \left\{ (l) \subset \Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)} \;\middle|\; l \text{ は } \Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)} \text{ の線形元} \right\}$$

とする.

3. $n \geq 2$ とする. ある有限生成ねじれ $\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$-加群 M に対して, $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(n)}$ の部分集合 $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(n)}[M]$ を次で定める:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(n)}[M] = \left\{ (l) \in \mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(n)} \;\middle|\; \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}/(l)}(M/(l)M) \text{ は } \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}}(M) \text{ の } (l) \text{ での特殊化に一致} \right\}$$

このように test family として採用した上の集合は非常にわかりやすく扱いやすいものである. 例えば, $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(n)}$ の中で $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(n)}[M]$ がどのくらいの大きさを占めるかをよくコントロールできる. 特性イデアルの特徴づけを示すにはたくさんの元を含む十分大きな test family であると同時に, コントロールできる程度の適度の大きさの test family をとることが大事となる. $n \geq 2$ に対しては次のような特性イデアルの特徴づけが示される.

命題 4.5. [O6, 命題 3.3] $n \geq 2$ であるとし, M, N を有限生成ねじれ $\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}$-加群とする. このとき次の2つは同値となる.

1. 特性イデアルの間の包含関係 $\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}}(M) \supset \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{(n)}}(N)$ がある.
2. $\mathcal{O}'$ を $\mathcal{O}$ 上有限な勝手な完備離散付値環とする. このと, 任意の $(l) \in \mathcal{L}_{\mathcal{O}'}^{(n)}[M_{\mathcal{O}'}] \cap \mathcal{L}_{\mathcal{O}'}^{(n)}[N_{\mathcal{O}'}]$ に対して, 次のような特性イデアルの包含関係が成り立つ:

$$\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathcal{O}'}^{(n)}/(l)}(M_{\mathcal{O}'}/(l)M_{\mathcal{O}'}) \supset \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathcal{O}'}^{(n)}/(l)}(N_{\mathcal{O}'}/(l)N_{\mathcal{O}'}).$$

我々は, $n=1$ のときにも上の命題と同様な「特性イデアルの特徴づけ原理」が必要である. $n=1$ の場合には上の命題とは少しことなる family をとる必要がある. 1 変数岩澤代数 $\mathcal{O}[[X]]$ 上のねじれ加群が与えられたときには, その特性イデアルの根を p-進的に近似する多項式の系列やアイゼンシュタイン多項式たちからなる多項式の family を考えることで類似の特徴づけ原理を与える [O6, 命題 3.9]. ここでは紙数を考えてこれ以上は立ち入らないことにする. (詳しくは [O6, §4] を参照).

上で説明した特性イデアルの特徴づけ原理により, 定理 4.3 の証明は n に関する帰納法で完備離散付値環上の場合 ($n=0$ の場合) に帰着されるわけである.

T を $\mathbb{Z}_p$ 上有限なある完備離散付値環 $\mathcal{O}'$ 上階数 2 のガロア表現とする. $n=0$ の場合に次のような定理を伝統的なオイラー系の手法にそって示す.

定理 4.6. $\{z(r) \in H^1(\mathbb{Q}(\zeta_r), T^*(1))\}_{r\in\mathcal{R}}$ を $(T, \mathcal{O}')$ に関するオイラー系とする. 次の条件を仮定する:

(i). $z = z(1)$ は $H^1(G_S, T^*(1))$ の $\mathcal{O}$-ねじれ部分には入らない.
(ii). T の複素共役 σ による $\pm$-固有空間 $T^{\pm}$ はともに $\mathcal{O}'$ 上階数 1 である.
(iii). S に含まれるような悪い素点を含めたすべての有限素点 v において, $H^0(\mathbb{Q}_v, T) = 0$ となる.

さらに条件 (Im) を仮定するとともに (Im) を満たす $\tau, \tau' \in G_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})}$ を固定する. このとき次が成立する:

(1) $Ш_S^2(T^*(1)) = \mathrm{Ker}[H^2(G_S, T^*(1)) \longrightarrow \bigoplus_{l\in S} H^2(\mathbb{Q}_l, T^*(1))]$ は有限群となる.
(2) 位数の間の不等式 $\sharp\left(H^1(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q}, \overline{T})\ /\mathcal{O}z\right) \geq \sharp\left(\mathfrak{A}_\tau \mathfrak{B}_{\tau'} Ш_S^2(\overline{T})\right)$ が成立する.

注意 4.7. このような離散付値環上のオイラー系については $\mathfrak{A}_\tau = \mathfrak{B}_{\tau'} = (1)$ の場合には多くの文献で示されている (例えば [R2, Chap. 5]). 後の重さ 1 の岩澤理論への応用を考えると上のように $\mathfrak{A}_\tau$ や $\mathfrak{B}_{\tau'}$ が必ずしも自明でない場合にも explicit な bound を与えることも有用となってくる.

完備離散付値環上の場合の定理 4.6 の証明は Kolyvagin 微分を使って素数を注意深く選びながら増やしてガロアコホモロジーの duality theorem により位数を評価する方法である. この部分がオイラー系の議論の最もオイラー系たるところではあるが評価をより正確に書き下すという技術的な部分以外は証明のおおまかな方針は

多くのレファレンスに示されているものと同様であることもあり紙数との兼ね合いから今回は省かせていただきたい. 詳しくは [O6, §4] を参照のこと.

以上が定理 4.3 の証明のアウトラインであったが, 最後にもうひとつコメントを与えておく.

注意 4.8. 特に T として完備離散付値環上の表現をとり, cyclotomic tower からくるガロア変形 $\widetilde{T} = T\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[[G_\infty]](\widetilde{\chi})$ を考えるとき, 上の結果は以前からよく知られている ([Ka2], [P] and [R2]) ものとなる. ただ, 以前の証明は特殊化としては数論的な特殊化のみを考えてガロア変形が p-進 Lie 拡大からきているという情報をも本質的に使う証明であった. 今回の証明は必ずしも数論的とは限らない特殊化までも含めたより多くの特殊化を考えることにより全てを $n = 0$ の場合に帰着するという点で非常に単純な原理の証明である. かくして classical な cyclotomic deformation の場合に限っても Kato[Ka2], Perrin-Riou[P], Rubin[R2] の証明の簡単な別証明を与えていることにも注意しておきたい.

また, $n = 1$ のときには今回の上述の結果と似たアイデアでの cyclotomic tower におけるオイラー系の証明の別証明および簡略化が Mazur と Rubin による最近の仕事 [MR] によっても得られているようである.

4.3. 重さ 1 のモジュラー形式からくるアルチン表現への応用. 第 2 節で少し述べたようにガロア変形の岩澤理論を考えることで critical とは限らないガロア表現のセルマー群に関しても新しい知見が得られるという応用がある. 少しだけ説明をしておきたい.

N を p と素な正の整数とし, $f = \sum a_n q^n \in S_1(\Gamma_1(N))$ を重さ 1 の正規化された原始的固有カスプ形式とする. f の p-オイラー因子を与える 2 次多項式 $X^2 - a_p(f)X + \psi(p)$ の 2 根を α, β とする. ここで, α, β はともに p-単数であることに注意したい. ここで 2 根のうちのひとつ例えば α を選び α に関する p-stabilization $f_\alpha = f(q) - \beta f(q^p) \in S_1(\Gamma_1(Np))$ を考える. f_α はレベルを割る素点での U-作用素もこめてすべての素点でヘッケ作用素の固有ベクトルとなっており $U_p f_\alpha = \alpha f_\alpha$ をみたす. 定理 3.1 でも説明したように f_α に付随する $G_{\mathbb{Q}}$ のある完備離散付値環 $\mathcal{O}$ 上の 2 次元表現 T_{f_α} が存在しさらにアルチン表現となっている. また, p での局所性質として $G_{\mathbb{Q}_p}$-加群の分解 $T_{f_\alpha} = \mathrm{F}_\alpha A_{f_\alpha}) \oplus \mathrm{F}_\beta A_{f_\alpha})$ が存在し, $\mathrm{F}_\alpha A_{f_\alpha}$ (resp. $\mathrm{F}_\beta A_{f_\alpha}$) は幾何的フロベニウスの値が α (resp. β) で与えられるような $G_{\mathbb{Q}_p}$ の不分岐表現となる. f_α のセルマー群を Greenberg 流に

$$\mathrm{Sel}(f_\alpha, \mathbb{Q}_\infty) = \mathrm{Ker}[H^1(\mathbb{Q}, A_{f_\alpha}) \longrightarrow \prod_{\lambda \nmid p} H^1(I_\lambda, A_{f_\alpha}) \times H^1(I_p, A_{f_\alpha}/\mathrm{F}_\alpha A_{f_\alpha})].$$

と定めることにする．ガロア群の像が有限なアルチン表現を考えていることよりセルマー群 $\mathrm{Sel}(f_\alpha, \mathbb{Q}_\infty)$ は単数群やイデアル類群等の対象と結びつきやすい．単数群の局所埋め込みの大きさに関する Ax-Baker-Brumer の定理等を用いる議論により，Greenberg-Vatsal は次の定理を示している．

定理 4.9. [GV] セルマー群 $\mathrm{Sel}(f_\alpha, \mathbb{Q}_\infty)$ のポントリャーギン双対 $\mathrm{Sel}(f_\alpha, \mathbb{Q}_\infty)^\vee$ は有限生成ねじれ $\mathcal{O}[[G_\infty]]$-加群となる．

上記のねじれ性の結果から次のような問いが自然に発せられる：

問題． ねじれ $\mathcal{O}[[G_\infty]]$-加群 $\mathrm{Sel}(f_\alpha, \mathbb{Q}_\infty)^\vee$ の特性イデアルはどのような意味をもつか？特に何らかの形で L 函数的な情報との結びつきがあるか？

ここで注意するべきことは重さ 1 のモジュラー形式に付随するヘッケ函数の特殊値は全く代数性をもたないということである．つまり第 1 節で考えた場合のような critical の条件が満たされないため特殊値を複素周期で修正して代数的数とみなすことができない．そのため，自然な意味で f の cyclotomic tower に付随する 1 変数 p-進 L 函数というものは存在しないのである．したがってこの問題は第 1 節で述べた cyclotomic tower における p-進表現の岩澤理論の枠組みを超えるより難しい問題といえる．

このような問題に対する研究としては Greenberg-Vatsal によって Stark 単数による p-進 regulator 写像を用いてひとつの回答が与えられている [GV]．Greenberg は上の仕事とともにセルマー群 $\mathrm{Sel}(f_\alpha, \mathbb{Q}_\infty)^\vee$ に対応する p-進 L 函数を 2 変数 p-進 L 函数の特殊化として岩澤主予想を考える別のアイデアも提案している [Gr3]．つまり，$\widetilde{T}$ に付随する 2 変数 p-進 L 函数の $\wp$ での特殊化を f_α に対応する 1 変数 p-進 L 函数 $L_p(f_\alpha)$ として定義してしまうのである．この方針での岩澤主予想への我々の結果の応用を説明するために次の Wiles の結果を思い出したい．

定理 4.10. [Wi] 通常ヘッケ環 $\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}$ と通常ガロア変形 $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \cong (\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})^{\oplus 2}$ で次の条件を満たすものが存在する：

1. ある重さ -1 の数論的点 $\wp \in \mathrm{Spec}(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})$ が存在して，特殊化 $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}} \wp(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}})$ は T_{f_α} と同型になる．
2. $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現としてのフィルトレーション
$$0 \longrightarrow \mathrm{F}^+\widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \mathrm{F}^-\widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow 0$$
が存在して，$\mathrm{F}^+\widetilde{T}^{\mathrm{ord}} \otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}} \wp(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}) = \mathrm{F}_\alpha T_{f_\alpha}$ となる．

上の Wiles で得られる 2 変数セルマー群 $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})$ は自然な重さ -1 への制限写像 $\mathrm{Sel}(\widetilde{T})^\vee \otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}} \wp(\mathbb{H}^{\mathrm{ord}}) \longrightarrow \mathrm{Sel}(f_\alpha, \mathbb{Q}_\infty)^\vee$ をもつ．また第 3 節で定められたイデアル

$\mathfrak{A}_{\tau}$, $\mathfrak{B}_{\tau'}$ の $\wp$ での特殊化は $\mathcal{O}[[G_\infty]]$ の定数イデアルとなる．したがって，第３節の主定理の不等式を $\wp$ で特殊化することにより次を得る：

定理 4.11. T_{f_α} を延長する通常変形 $\widetilde{T}^{\mathrm{ord}}$ がある巾級数環 $\mathcal{O}[[X]]$ 上階数２の自由加群になると仮定する．このとき，ある定数 $\mu \in \mathcal{O}$ が存在して，

$$(\mu L_p(f_\alpha)) \subset \mathrm{char}_{\mathcal{O}[[G_\infty]]}(\mathrm{Sel}(f_\alpha, \mathbb{Q}_\infty)^\vee)$$

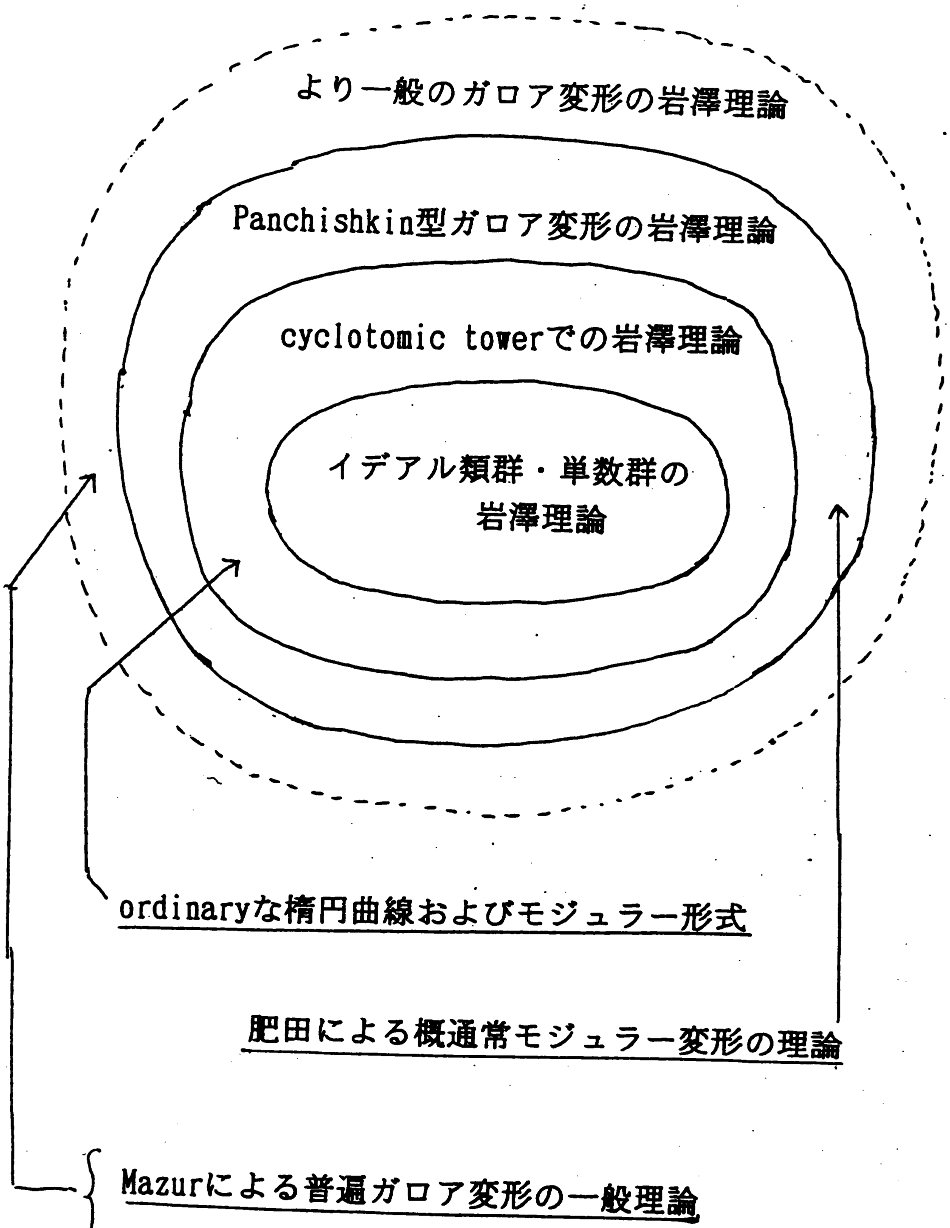
が成り立つ．

このようにして２変数の岩澤主予想の応用として上の問題に対するまた別の回答が与えられるのである．

4.4. **最後に．** 我々は，「ガロア変形の岩澤理論」がどのようなものであるべきかを主に肥田氏の概通常変形の場合にみてきた．この場合に限って以前と異なるガロア変形の岩澤理論に現れる新しい問題を浮き彫りにするとともに (注意 3.4)，新しい道具を整備しつつ現状で調べられた結果を説明してきた．最後にいくつかの注意点やこれからの展望，期待を述べてこの稿を終わりたい．

1. 第３節の主定理においては片方の包含関係のみが示されたのであるが，単に不等式（包含関係）だけでなく非自明な等式が成り立つ例も探すことが重要であると思われる．もともとの cyclotomic tower の岩澤理論においても加藤氏の結果 (注意 1.1 の２) は片方の包含関係のみしか示していない．最近の Greenberg 氏自身および Greenberg-Vatsal によって cyclotomic tower の場合には等式が導かれる例がみつけられたりセルマー群の特性イデアルがわかる例が様々な方法を駆使してみつけられている．我々の２変数岩澤理論はまだ研究も浅く例があまり知られていない．また考える岩澤代数のクルル次元が高くなることや肥田理論自身に対する我々の知見の欠如のために例をみつけることも cyclotomic tower の場合に比べて難しくなる．いずれにしろ様々な手法を試みながら２変数岩澤主予想やセルマー群の特性イデアルの例を豊富にみつけていくことは今後の課題である．
2. 肥田氏の概通常変形の場合の予想の定式化についてもまだするべきことは残っている．我々の２変数 p-進 L 関数 $L_{p,d}^{\mathrm{Bei\text{-}K}}(\widetilde{T})$ の構成がセルマー群と結びつきやすい構成であることもあり３．２節で述べた岩澤主予想においては２変数 p-進 L 関数として $L_{p,d}^{\mathrm{Bei\text{-}K}}(\widetilde{T})$ を採用することが自然であるという主張を述べた．我々の岩澤主予想の定式化をよりよく理解するためには他の多くの２変数 p-進 L 関数と $L_{p,d}^{\mathrm{Bei\text{-}K}}(\widetilde{T})$ との関係も明らかにしていくことが大切に思われる．特に今回触れなかったＣＭ型の概通常肥田変形の場合は既に Rubin による２変数岩澤主予想の解決 [R1] があり，主予想に現れる p-進 L 関数としては Katz の

2 変数 p-進 L 函数 [Kz] が用いられている．一方で我々の p-進 L 函数 $L_{p,d}^{\text{Bei-K}}(\widetilde{T})$ はＣＭ型の概通常肥田変形の場合にも構成されていることより，概通常肥田変形の岩澤主予想の定式化の整備のためにはＣＭ型の概通常肥田変形の場合に我々の $L_{p,d}^{\text{Bei-K}}(\widetilde{T})$ と Katz の 2 変数 p-進 L 函数とを比較してやることも必要となる．



3. 将来的には今回考えてきた楕円モジュラーの場合の概通常変形の場合以外にも岩澤理論を広げて行きたい. 肥田氏により楕円モジュラーの場合 ($GL(2)_{/\mathbb{Q}}$ の場合) に限らず様々な簡約代数群に対する肥田理論が得られており, それらの肥田変形を岩澤理論的視点で調べていくことも楽しいのではないかと思う. そのような一般化された肥田変形もすべて Panchishkin 型というクラスに入るので期待としては似たような定式化での岩澤主予想が成り立ちそうである. ただ, 本稿に述べたオイラー系の手法では攻めきれずより様々な手法を駆使しての研究が必要になりそうである.

Greenberg の論文 [Gr1] は常に Panchishkin 型というクラスのものを範疇として扱っていた. 前ページの図にあげたように Panchishkin(または nearly ordinary) でないガロア変形においても岩澤理論を考えることは面白いのではないかと考えている. 一般に Panchishkin 型を外れたガロア変形も Mazur のガロア変形の一般論 [M2] などによって豊富に例は知られている. また最近の Coleman, Gouvea, Mazur の仕事において特殊な場合に全変形空間のモジュラー性が示されている ([CM] など参照). これは Coleman による slope non-zero case における肥田理論の類似である weight space 上の one parameter family の理論 [Co] を用いて twin のアイデアで全変形空間をモジュラーな parameter family でうめ尽くすことにより示されるのである. このような手法により $G_{\mathbb{Q}}$ の作用する3次元巾級数環 $\mathbb{Z}_p[[X_1, X_2, X_3]]$ 上のガロア表現 $\widetilde{T} \cong \mathbb{Z}_p[[X_1, X_2, X_3]]^{\oplus 2}$ で稠密な点においてモジュラーとなるような例が構成されている. Panchishkin 型を外れたガロア変形もこのような興味深い例がありこれらについても何らかの岩澤理論が構築されていくことを夢見ている.

このような場合にはもはやセルマー群もねじれ性はもたないと思われ, p-進 L 函数の構成もより一層むつかしくなる. よい岩澤理論の追及は今まで以上に暗中模索の感があるが, 上で紹介した Coleman-Gouvea-Mazur のモジュラー変形空間には ordinary なモジュラー形式からくるガロア表現と slope non-zero のモジュラー形式からくるガロア表現が混在しており, 第2節で述べた ordinary モジュラー形式の岩澤理論や最近栗原氏らをはじめとした人々により整備されてきた non-ordinary の岩澤理論をまとめるような何らかの岩澤理論があれば面白いのではないかと考えている.

最後になるが, この研究集会において講演の機会を与えてくださった伊原康隆先生および推薦してくださった東京都立大の栗原将人先生に感謝したい. また今回の研究は東大数理博士課程在学中からのものである. 指導教授の斎藤毅先生および研

究上の刺激を与えてくれた多くの同僚先輩方, 特に学習院大の八森祥隆氏, 東京都立大の松野一夫氏にこの場をかりて感謝をささげたい.

References

[BK] S. Bloch, K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, the Grothendieck Festschrift I, Progress in Math., **86**, 333–400, 1990.

[CP] J. Coates, B. Perrin-Riou, *On p-adic L-functions attached to motives over Q*, Algebraic number theory, 23–54, Adv. Stud. Pure Math., **17**.

[Co] R. Coleman, *p-adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. Math. **127**, no. 3, 417–479, 1997.

[CM] R. Coleman, B. Mazur, *The eigencurve*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry, 1–113, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 254, Cambridge Univ. Press, 1998.

[De1] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, Séminaires Bourbaki **355**, 139–172, Lecture notes in Math., **179**, Springer Verlag, 1969.

[De2] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 247–289, 1979.

[DS] P. Deligne, J. P. Serre, *Formes modulaires de poids* 1. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 7 (1974), 507–530 (1975).

[Fi] A. Fischman, *On the image of Λ-adic Galois representations*, to appear in Annales de l'Institut Fourier in 2002.

[Fu1] T. Fukaya, *The theory of Coleman power series for K_2*, preprint.

[Fu2] T. Fukaya, *Coleman power series for K_2 and p-adic zeta functions of modular forms*, in preparation.

[Gr1] R. Greenberg, *Iwasawa theory for p-adic deformations of motives*, Proceedings of Symposia in Pure Math. **55** Part 2, 193–223, 1994.

[Gr2] R. Greenberg, *Iwasawa theory for elliptic curves*, Arithmetic theory of elliptic curves (Cetraro, 1997), 51–144, Lecture Notes in Math., **1716**, Springer, Berlin, 1999.

[Gr3] R. Greenberg, 東京都立大学集中講義 (２００１年６月).

[GS] R. Greenberg, G. Stevens, *p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms*, Invent. Math. **111** no. 2, 407–447, 1993.

[GV] R. Greenberg, N. Vatsal, *Iwasawa theory for p-adic Artin L-functions*, in preparation.

[H1] H. Hida, *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. Ecole Normal. sup., **19**, 231–273, 1986.

[H2] H. Hida, *Galois representations into $GL_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. **85**, 545–613, 1986.

[Ka1] K. Kato, *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. I*, Arithmetic algebraic geometry, 50–163, Lecture Notes in Math., 1553, Springer, 1993.

[Ka2] K. Kato, *Euler systems, Iwasawa theory, and Selmer groups*, Kodai Math. J. **22**, no. 3, 313–372, 1999.

[Ka3] K. Kato, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, preprint.

[Kz] N. Katz, *p-adic L-functions for CM fields*, Invent. Math. **49**, no. 3, 199–297, 1978.

[Ki] K. Kitagawa, *On standard p-adic L-functions of families of elliptic cusp forms*, p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, 81–110, Contemp. Math., **165**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[L] S. Lang, *Cyclotomic Fields I and II*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1990.

[M1] B. Mazur, *Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields*, Invent. Math. **18**, 183–266, 1972.

[M2] B. Mazur, *Deforming Galois representations*, Galois groups over Q, 385–437, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 16, Springer, 1989.

[MR] B. Mazur, K. Rubin, *Kolyvagin systems*, preprint, 2001.

[MS] B. Mazur, P, Swinnerton-Dyer, *Arithmetic of Weil curves*, Invent. Math. **25**, 1–61, 1974.

[MTT] B. Mazur, J. Tate, J. Teitelbaum, *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. **84**, no. 1, 1–48, 1986.

[MW1] B. Mazur, A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of* $\mathbb{Q}$, Invent. Math. **76** no. 2, 179–330, 1984.

[MW2] B. Mazur, A. Wiles, *On p-adic analytic families of Galois representations*, Compositio Math. **59**, no. 2, 231–264. 1986.

[O1] T .Ochiai, 代数的整数論とその周辺（１９９８年）報告集, "局所 Weil 群の表現とそのトレースについて" 数理研講究録 vol.1097.

[O2] T .Ochiai, 代数的整数論とその周辺（２０００年）報告集, "ガロア表現の変形に対する岩澤主予想とオイラー系について", 数理研講究録 vol.1154.

[O3] T. Ochiai, *Control theorem for Bloch-Kato's Selmer group of p-adic representations*, Jour. of Number theory, **82**, 69–90, 2000.

[O4] T. Ochiai, *Control theorem for Greenberg's Selmer groups for Galois deformations*, Jour. of Number Theory, **88**, 59–85, 2001.

[O5] T. Ochiai, *Coleman map for Hida deformations*, preprint, 2000.

[O6] T. Ochiai, *Euler system for Galois deformations*, preprint, 2002.

[P] B. Perrin-Riou, *Systémes d'Euler p-adiques et théorie d'Iwasawa*, Ann. Inst. Fourier, **48**, no. 5, 1231–1307, 1998.

[R1] K. Rubin, *The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields*, Invent. Math. **103**, no.1, 25–68, 1991.

[R2] K. Rubin, *Euler systems*, Annals of Math. Studies **147**, Princeton University Press, Spring 2000.

[Sa] T. Saito, *Weight spectral sequences and independence of l*, preprint.

[Si] J. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, **106**, Springer-Verlag, 1986.

[Wa] L. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **83**, Springer-Verlag, New York, 1997.

[Wi] A. Wiles, *On λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94**, 529–573, 1988.